Composition n° 0, une correction

Exercice 1 (Des questions de cours)
Voir le cours de mathématiques...

Exercice 2

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = 3\mathrm{e}^{-3x} - 3(3x+1)\mathrm{e}^{-3x} = -9x\mathrm{e}^{-3x}$$

Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. On a de plus $f(0) = 2$ et :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty \\ f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(par croissances comparées)} \end{cases}$$

2. • On a $f(-1) = -2\mathrm{e}^3+1 < 0$ et $f(0) = 2 > 0$. Comme f est **continue**, selon le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]-1, 0[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

   • Puis $f > 0$ sur $[0, +\infty[$ et f est **strictement croissante** sur $]-\infty, 0[$: α est l'unique réel tel que $f(\alpha) = 0$.

Exercice 3
Comme P est de degré impair, en confondant P avec la fonction polynôme associée, quitte à changer P en $-P$, on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{-\infty} P = -\infty \\ \lim\limits_{+\infty} P = +\infty \end{cases}$$

Ainsi la fonction P qui est continue sur $\mathbb{R}$ change de signe strict sur $\mathbb{R}$: le théorème des valeurs intermédiaire assure alors l'existence de $\alpha \in R$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Exercice 4
Soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f(x) - x$. Raisonnons par l'absurde et supposons que g ne s'annule pas sur $]0, 1[$. Comme elle est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, on a $g > 0$ ou $g < 0$ sur $]0, 1[$. Dans le premier cas, il vient donc :

$$0 < \int_0^1 g = \int_0^1 f - \frac{1}{2},$$

ce qui est absurde. L'autre cas se traite de même.

Exercice 5
Pour J on utilise la formule $(u^2)' = 2uu'$ et on trouve $J = \dfrac{1}{2}$.
On trouve $K = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{3/2}$. Pour cela on se sert de la formule $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.
On trouve $L = \dfrac{1}{2}$. On se sert de $(u^2)' = 2uu'$ avec $u(t) = \ln t$.
Pour M la fonction intégrée est de la forme u'/u, comme pour N après multiplication au numérateur et dénominateur par e^x.

Exercice 6
Soient $a_1, \ldots, a_n$ les racines de P rangées dans l'ordre strictement croissant. Fixons i dans $\{1, \ldots, n-1\}$. La fonction polynomiale P est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$ et dérivable sur $]a_i, a_{i+1}[$. De plus $P(a_i) = P(a_{i+1})$: le théorème de Rolle s'applique. Il existe $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que $P'(b_i) = 0$. Comme :

$$b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < \cdots < a_{n-1} < b_{n-1} < a_n,$$

le polynôme P' admet $n-1$ racines réelles distinctes.

Exercice 7

• Comme la série $\sum u_n$ converge, on a $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ et ainsi :

$$\frac{u_n}{1-u_n} \sim u_n \boxed{\geqslant 0}.$$

Ainsi les séries $\sum \dfrac{u_n}{1-u_n}$ et $\sum u_n$ ont même nature : la série $\sum \dfrac{u_n}{1-u_n}$ converge.

• Comme la série $\sum u_n$ converge, on a $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ et ainsi il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Alors, pour tout $n \geqslant N$ on a :

$$0 \leqslant u_n^2 \leqslant u_n.$$

On peut alors conclure que la série $\sum u_n^2$ converge par domination.

Exercice 8

L'équation homogène associée est $y' + y = 0$ et sa solution générale est $t \mapsto C\mathrm{e}^{-t}$ où C décrit $\mathbb{R}$.
On cherche alors une solution particulière de la forme $f : t \mapsto \lambda(t)\mathrm{e}^{-t}$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout t réel on a $f'(t) = (\lambda'(t) - \lambda(t))\mathrm{e}^{-t}$. On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned} & y \text{ solution de } y' - y = h(t) \text{ sur } \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \quad & (\lambda'(t) + \lambda(t))\mathrm{e}^{-t} + \lambda(t)\mathrm{e}^{-t} = g(t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda'(t) = g(t)\mathrm{e}^{t} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On prend $\lambda : x \mapsto \displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$ de sorte que la solution générale de l'équation différentielle (E) est :

$$x \mapsto \left(C + \int_0^x g(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

Exercice 9 (Représentation matricielle d'endomorphismes)

1. On a :

$$\begin{cases} f(1) & = 1 \\ f(X) & = X - 1 \\ f(X^2) & = X^2 - 2X \end{cases}$$

La matrice de f dans la base canonique est donc : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de la matrice A. On a $C_2 = -2C_1$ donc $\mathrm{rg}(A) \leqslant 2$.De plus les colonnes C_2 et C_3 sont non colinéaires, donc on peut dire que $\mathrm{rg}(A) = 2$.

D'après le théorème du rang $\dim \ker f = 1$. De la relation $C_2 = -2C_1$ on obtient $f(e_2) = -2f(e_1)$: ainsi $e_2 + 2e_1$ est un vecteur (non nul) du noyau de f et on peut conclure que $\ker f = \mathrm{vect}(e_2 + 2e_1)$.

Enfin $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{vect}\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big)$. Or $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont colinéaires et on a :

$$f(e_1) = (-1, 0, 2) \quad \text{et} \quad f(e_3) = (0 - 2, 1).$$

On peut donc écrire $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{vect}(-e_1 + 2e_3, -2e_2 + e_3)$.