Composition n° 0

Le mercredi 2 septembre 2026

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*La **présentation** de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées.*
Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Exercice 1 (Des questions de cours)

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 des trois fonctions sin, cos et $x \mapsto \ln(1+x)$.
2. Donner la définition d'une fonction convexe (définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$).

Exercice 2

1. Dresser le tableau de variation de la fonction f définie par : $f(x) = (3x+1)\mathrm{e}^{-3x} + 1$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que α est dans l'intervalle $]-1, 0[$.

Exercice 3

Soit P un polynôme à coefficients réels, de degré impair. Démontrer que P admet au moins une racine réelle.

Exercice 4

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $2\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Démontrer que f a un point fixe dans $]0,1[$ c'est à dire qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes :

$$J = \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t\,\mathrm{d}t,\quad L = \int_1^e \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t,\quad M = \int_2^{10000} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t,\quad K = \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{1+\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad N = \int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 6

Soient $n \geqslant 2$ entier et $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré n, qui admet n racines réelles distinctes. Démontrer que P' admet $n-1$ racines réelles distinctes.

Exercice 7

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \neq 1$ et que la série $\sum u_n$ converge.
Démontrer que les séries $\displaystyle\sum \frac{u_n}{1-u_n}$ et $\sum u_n^2$ convergent.

Exercice 8

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer (à l'aide d'une intégrale) la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E)\ y' + y = g(t).$$

Exercice 9 (Représentation matricielle d'endomorphismes)

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}_2[X]$ défini, pour $P \in \mathbb{C}_2[X]$, par $f(P) = P - P'$.
   Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{C}_2[X]$.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.
   On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A et on note $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Déterminer l'image et le noyau de f (on donnera une base de ces deux sous-espaces vectoriels).