Composition n° 8

Le samedi 29 mars 2025

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

La **présentation** de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Exercice

On note E l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application $\phi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire sur E .

On note $\| \cdot \|$ la norme sur E associée à ce produit scalaire.

Pour $n \geq 2$ entier, on note E_n le sous-espace vectoriel de E des fonctions polynomiales de degré inférieur à $n - 1$. On rappelle que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E_n , où, pour i dans $\{1, \dots, n\}$, $e_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est l'application définie, pour t dans $[0, 1]$, par $e_i(t) = t^{i-1}$.

2. Pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, calculer $\phi(e_i, e_j)$.

On considère maintenant la matrice $H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{i+j-1} \right]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. **Etude du cas $n = 2$.**

- Déterminer les valeurs propres de la matrice H_2 .
- La matrice H_2 est-elle diagonalisable ?
- Démontrer que la matrice H_2 est inversible et calculer son inverse.

Dans toute la suite du problème n désigne un entier supérieur à 2.

4. Établir que la matrice H_n est diagonalisable.
5. a) Soient P et Q dans E_n . On écrit $P = \sum_{k=1}^n a_k e_k$ et $Q = \sum_{k=1}^n b_k e_k$ où $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont des

réels. On note $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Démontrer que $\phi(P, Q) = A^\top H_n B$.

- En déduire que les valeurs propres de la matrice H_n sont strictement positives.
- La matrice H_n est-elle inversible ?

6. Soit $f \in E$. On note, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $\beta_i = \phi(e_i, f)$.

On considère les matrices colonnes B et A_0 définies par $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A_0 = H_n^{-1}B$.

On note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les réels tels que $A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, et P_0 la fonction polynôme sur $[0, 1]$ définie par :

$$P_0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k.$$

On considère l'application $d : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $d(P) = \|P - f\|$.

- Démontrer que pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$ on a : $\phi(e_i, P_0 - f) = 0$.
- En déduire que pour tout Q dans E_n on a : $\phi(Q, P_0 - f) = 0$.
- Démontrer que pour tout P dans E_n on a : $\|P - f\|^2 = \|P - P_0\|^2 + \|P_0 - f\|^2$.
- Démontrer que d admet un minimum et que ce minimum est atteint en P_0 et en P_0 seulement.
- Démontrer que $\|P_0 - f\|^2 = \|f\|^2 - \|P_0\|^2$.

Problème

Notations et rappels

Soit n un entier supérieur à 1. On désigne par $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans cet ordre. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ sa transposée.

On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $\langle | \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \|$ associée. On note $\mathcal{S}(E)$ le sous-espace des endomorphismes auto-adjoints de E , c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes s de E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle s(x)|y \rangle = \langle x|s(y) \rangle.$$

Un endomorphisme auto-adjoint s de E est dit auto-adjoint positif (respectivement auto-adjoint défini positif) si :

$$\forall x \in E, \langle s(x)|x \rangle \geq 0 \text{ (respectivement } \forall x \in E \setminus \{0\}, \langle s(x)|x \rangle > 0).$$

Une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive (respectivement symétrique définie positive) si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^\top S X \geq 0 \text{ (respectivement } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^\top S X > 0).$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (respectivement symétriques définies positives) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle qu'un endomorphisme s de E est auto-adjoint (respectivement auto-adjoint positif, auto-adjoint défini positif) si, et seulement si, sa matrice dans toute base orthonormée de E est symétrique (respectivement symétrique positive, symétrique définie positive).

On admet que, pour tous réels positifs $a_1, \dots, a_n$,

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \text{ (inégalité arithmético-géométrique).}$$

Objectif du problème

On se donne une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) et on étudie le maximum (ou minimum) de la forme linéaire $A \mapsto \text{Tr}(AS)$ sur des ensembles de matrices.

Partie I - Questions préliminaires

- a) Enoncer (sans démonstration) le théorème de réduction des endomorphismes auto-adjoints de l'espace euclidien E et sa version relative aux matrices symétriques réelles.
b) Toute matrice symétrique à coefficients complexes est-elle nécessairement diagonalisable ? On pourra par exemple considérer la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

- Soit $s \in \mathcal{S}(E)$, de valeurs propres (réelles) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Soit $\beta = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ une base orthonormée de E telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, ϵ_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i . Pour tout vecteur x de E , on pose :

$$R_s(x) = \langle s(x) | x \rangle.$$

- a) Exprimer $R_s(x)$ à l'aide des λ_i et des coordonnées de x dans la base β .
b) En déduire l'inclusion : $R_s(S(0, 1)) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$ où $S(0, 1)$ désigne la sphère unité de E .
- a) On suppose dans cette question que s est auto-adjoint positif (respectivement auto-adjoint défini positif).
Démontrer que les valeurs propres de s sont toutes positives (respectivement strictement positives).
b) Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

On note s l'endomorphisme de E représenté par S dans la base canonique $B = (e_1, \dots, e_n)$. Exprimer le terme général $s_{i,j}$ de S comme un produit scalaire et démontrer que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \lambda_1 \leq s_{i,i} \leq \lambda_n.$$

Partie II - Un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Démontrer que l'application $M \mapsto M^T M - I_n$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Justifier que, si $A = (a_{i,j})$ est une matrice orthogonale, alors :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \quad |a_{i,j}| \leq 1.$$

- En déduire que le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte (i.e. fermée et bornée) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (positives) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On pose $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Si A est une matrice orthogonale, on note $T(A)$ le nombre réel $T(A) = \text{Tr}(AS)$.
a) Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale B telle que :

$$T(A) = \text{Tr}(B\Delta).$$

- Démontrer que l'application T de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ que l'on notera t .
- Démontrer que, pour toute matrice orthogonale A de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $T(A) \leq \text{Tr}(S)$, puis déterminer le réel t .

Partie III - Inégalité d'Hadamard

Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (réelles positives) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

8. Démontrer l'inégalité valable pour tout $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$:

$$\det(S) \leq \left(\frac{1}{n} \operatorname{Tr}(S) \right)^n \quad (*).$$

9. Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $S_\alpha = D^\top S D$. Démontrer que $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et calculer $\operatorname{Tr}(S_\alpha)$.

10. Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux $s_{i,i}$ de S sont strictement positifs et, pour $1 \leq i \leq n$, on pose $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{s_{i,i}}}$. En utilisant l'inégalité (*), démontrer que :

$$\det(S) \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i}.$$

11. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on pose $S_\varepsilon = S + \varepsilon I_n$. Démontrer que $\det(S_\varepsilon) \leq \prod_{i=1}^n (s_{i,i} + \varepsilon)$, puis conclure que :

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i} \quad (\text{inégalité d'Hadamard}).$$

Partie IV - Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, et $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = \Omega \Delta \Omega^\top$. On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1.

12. Démontrer que, pour tout $A \in \mathcal{U}$, la matrice $B = \Omega^\top A \Omega$ est une matrice de $\mathcal{U}$ vérifiant :

$$\operatorname{Tr}(AS) = \operatorname{Tr}(B\Delta).$$

13. Démontrer que $\{\operatorname{Tr}(AS) \mid A \in \mathcal{U}\} = \{\operatorname{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$, puis que ces ensembles admettent une borne inférieure que l'on notera m .

14. Démontrer que, si $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$:

$$\operatorname{Tr}(B\Delta) \geq n(\lambda_1 \dots \lambda_n)^{1/n} (b_{1,1} \dots b_{n,n})^{1/n}.$$

15. En déduire que, pour $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$, $\operatorname{Tr}(B\Delta) \geq n(\det(S))^{1/n}$.

16. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on pose $\mu_k = \frac{1}{\lambda_k} (\det(S))^{1/n}$ et $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Déterminer le réel m .

Fin de l'énoncé