Composition n° 7, concours blanc CCM, une correction

Variables aléatoires entières symétriques à forte dispersion

Questions de cours

1. On dit que X est d'espérance finie si la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n P(X=x_n)$ converge absolument, c'est-à-dire si et seulement si la série la famille $(|x_n|P(X=x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

   D'après le théorème du transfert, $|X|$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0}|x_n|P(X=x_n)$ converge absolument ce qui est équivalent au fait que X soit d'espérance finie, d'où le résultat.

2. On suppose qu'il existe $M\geqslant 0$ tel que $P(|X|\leqslant M)=1$.
   On a alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n|P(X=x_n)\leqslant M\sum_{n\in\mathbb{N}}P(X=x_n)<+\infty,$$

   puisque si $|x_n|>M$,on a $P(X=x_n)=0$.
   Ainsi la famille $(|x_n|P(X=x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et X est d'espérance finie

Généralités sur les variables aléatoires

3. • Comme $|X|$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on sait que $E(X)=\sum_{n\geqslant 1}P(|X|\geqslant n)\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$.

   Or on a $P(|X|\geqslant n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\alpha}{n}$ avec $\alpha>0$, et on sait que la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ est divergente.

   Par comparaison de séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\geqslant 1}P(|X|\geqslant n)$ diverge aussi : ainsi $|X|$ n'est pas d'espérance finie, et X non plus.

   • La série numérique $\sum_{n\geqslant 0}|x_n|P(X=x_n)$ diverge.
   Or pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $x_n^2+1\geqslant 2|x_n|$, donc, par théorème de transfert, $E(X^2+1)\geqslant 2E(X)=+\infty$: X^2 n'est pas d'espérance finie.

4. • Puisque X est symétrique, les variables aléatoires X et $-X$ ont même loi. D'après le principe de transfert de l'égalité en loi (théorème 1 du préambule), $f(X)$ et $f(-X)$ ont aussi même loi. Or $f(-X)=-f(X)$ car f est supposée impaire, donc finalement il en résulte que $f(X)$ et $-f(X)$ ont même loi : cela prouve que $f(X)$ est symétrique.

   • On suppose que $f(X)$ est d'espérance finie. Puisque $f(X)$ et $-f(X)$ ont même loi, leurs espérances sont égales, donc : $E(f(X))=E(-f(X))$. Or l'espérance est linéaire, donc : $E(f(X))=-E(f(X))$. On en déduit : $E(f(X))=0$.

5. On veut montrer que $X+Y$ est symétrique. On veut montrer :

$$\forall z\in(X+Y)(\Omega),\quad P(X+Y=z)=P(-X-Y=z).$$

   Soit $z\in(X+Y)(\Omega)$. On a : $(X+Y=z)=\bigcup_{x\in X(\Omega)}(X=x,Y=z-x)$. Ainsi, par σ-additivité et indépendance des variables aléatoires X et Y il vient :

$$P(X+Y=z)=\sum_{x\in X(\Omega)}P(X=x,Y=z-x)=\sum_{x\in X(\Omega)}P(X=x)P(Y=z-x).$$

Comme X et Y sont symétriques on obtient :

$$\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)P(Y=z-x) = \sum_{x\in X(\Omega)} P(-X=x)P(-Y=z-x),$$

Un raisonnement analogue on montre que cette somme est égale à $P(-X-Y=z)$ et ainsi $P(X+Y=z) = P(-X-Y=z)$

Conclusion. $X+Y$ est symétrique.

Deux sommes de séries

6. • L'application $u \mapsto \dfrac{z}{1-uz}$ est continue sur $[0,1]$ en tant qu'inverse d'une fonction continue ne s'annulant par sur $[0,1]$: d'après le théorème fondamental de l'analyse, $L : t \mapsto \displaystyle\int_0^t \frac{z}{1-uz}\,du$ est de classe C^1 sur $[0,1]$, et on a :

$$\forall t \in [0,1], \quad L'(t) = \frac{z}{1-tz}.$$

• L'application L' est donc de classe C^∞ sur $[0,1]$, en tant que fraction rationnelle ne s'annulant par sur $[0,1]$, et L l'est également. Une récurrence facile permet d'obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \forall t \in [0,1], \quad L^{(n)}(t) = \frac{(n-1)!z^n}{(1-tz)^n}.$$

7. • Soit $t \in]0,1]$. D'après l'inégalité triangulaire , on a : $||1|-|tz|| \leqslant |1-tz|$.
Or $|1|-|tz| = 1-t|z| \geqslant 0$ donc l'inégalité ci-dessus devient : $1-t|z| \leqslant |1-tz|$. Or $t|z| \leqslant t$, donc $1-t \leqslant 1-t|z|$. On en déduit : $1-t \leqslant |1-tz|$.

• Pour montrer qu'on a une inégalité stricte : $1-t < |1-tz|$, nous allons supposer qu'il y a égalité, et en déduire une contradiction. Supposons que : $1-t = |1-tz|$, alors $1-t = 1-t|z|$ donc $|z|=1$. On écrit alors $z = e^{i\theta}$ et il vient :

$$|1-tz|^2 = |1|^2 - 2\mathrm{Re}\,(tz) + |tz|^2 = 1 - 2\cos(\theta)t + t^2.$$

Ainsi l'égalité $1-t = |1-tz|$ équivaut à :

$$2(\cos(\theta)-1)t = 0,$$

ce qui n'est possible que si $\cos(\theta) = 1$, c'est-à-dire : $\theta \equiv 0 \bmod 2\pi$. Mais dans ce cas on a $z = e^{i0} = 1$, ce qui est stupide car $z \neq 1$ par hypothèse de l'énoncé.

8. • On utilise le théorème de convergence dominée.
Posons : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in]0,1], \quad f_n(t) = \left|\dfrac{1-t}{1-tz}\right|^n.$
— Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est continue sur $]0,1]$.
— Le suite de fonction (f_n) converge simplement vers 0 sur $]0,1]$ car $\left|\dfrac{1-t}{1-tz}\right| < 1$ pour tout $t \in]0,1]$ d'après la question précédente.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0,1]$ on a :

$$|f_b(t)| \leqslant 1,$$

où la fonction $\varphi : t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0,1]$.

Le **théorème de convergence dominée** s'applique, et on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left|\frac{1-t}{1-tz}\right|^n \mathrm{d}t = \int_0^1 0 = 0.$

• On montre de même : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = 0$. Les seules différences sont :
— pour la convergence simple : on écrit que $\left|\dfrac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{|f_n(t)|}{|1-tz|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et on utilise un joli sandwich.
— une fonction de domination est dans ce cas $\varphi : t \mapsto \frac{1}{|1-tz|}$, continue par morceaux sur le segment $[0,1]$, donc intégrable sur $[0,1]$, et aussi sur $]0,1]$.

9. Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. L'application L est de classe C^N d'après la question 6. Par conséquent, la formule de Taylor avec reste intégral, à l'ordre N en 0, implique :

$$L(1) = \sum_{n=0}^{N} \frac{L^{(n)}(0)}{n!}(1-0)^n + \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} L^{(N+1)}(t)\,\mathrm{d}t \overset{[q.\,6]}{=} \sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n} + \int_0^1 (1-t)^N \frac{z^{N+1}}{(1-tz)^{N+1}}\,\mathrm{d}t$$

D'après la question précédente $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^N \frac{z^{N+1}}{(1-tz)^{N+1}}\,\mathrm{d}t \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la suite $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{z^n}{n}\right)_{N\geqslant 1}$ converge (c'est la différence d'une constante $L(1)$ et d'une suite convergeant vers 0), et quand $N \to +\infty$ cette égalité donne :

$$L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n},$$

Remarque. La lettre L évoque le logarithme, dont nous reconnaissons le développement en série entière dans le membre de droite (lorsque z est une variable réelle dans $[-1,1[$, nous avons là $-\ln(1-z)$).

10. • Montrons que γ est continue.
— Les fonctions $(t,u) \mapsto 1$, $(t,u) \mapsto u$ et $(t,u) \mapsto e^{it}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
— Par produit $(t,u) \mapsto ue^{it}$ est continu sur $\mathbb{R}^2$.
— Par somme $(t,u) \mapsto 1+ue^{it}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Comme le module est continue sur $\mathbb{C}$, la fonction γ est continue sur $\mathbb{R}^2$ par composition.
Comme le module est continue sur $\mathbb{C}$, la fonction γ est continue sur $\mathbb{R}^2$ par composition.

• Soit $a \in]0,\pi[$. Par restriction la fonction γ est continue sur $[-a,a]\times[0,1]$, qui est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$: γ atteint donc un minimum global sur $[-a,a]\times[0,1]$, c'est-à-dire : il existe $(t_0,u_0) \in [-a,a]\times[0,1]$ tel que :

$$\gamma(t_0,u_0) = \min_{(t,u)\in[-a,a]\times[0,1]} \gamma(t,u).$$

On pose $m_a = \gamma(t_0,u_0)$, on a donc bien l'existence de $m_a \geqslant 0$ tel que :

$$\forall (t,u) \in [-a,a]\times[0,1], \quad \left|1+ue^{it}\right| = \gamma(t,u) \geqslant \gamma(t_0,u_0) = m_a.$$

Il reste à démontrer que $m_a > 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $m_a = 0$. On a alors $\gamma(t_0,u_0) = 0$ et ainsi $u_0 e^{it_0} = -1$. De là $u_0 \neq 0$ et : $e^{it_0} = -\frac{1}{u_0} < 0$. En passant aux arguments on obtient : $t_0 \equiv \pi \bmod 2\pi$, mais c'est impossible car $t_0 \in [-a,a] \subseteq]-\pi,\pi[$. On en déduit qu'on ne peut pas avoir $m_a = 0$, et donc $m_a > 0$.

11. On utilise le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Posons :

$$\forall (t,u) \in]-\pi,\pi[\times[0,1], \quad f(t,u) = \frac{e^{it}}{1+ue^{it}}.$$

— Pour $t \in]-\pi,\pi[$ fixé, la fonction $u \mapsto f(t,u)$ est continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur $[0,1]$.
— A u fixé dans $[0,1]$ la fonction $t \mapsto f(t,u)$ est de classe C^1 sur $]-\pi,\pi[$, de dérivée :

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,u) = \frac{ie^{it}}{(1+e^{it}u)^2}.$$

— Pour $t \in]-\pi,\pi[$ fixé, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,u)$ est continue sur $[0,1]$.
— Pour tout segment $[-a,a] \subseteq]-\pi,\pi[$, et tout $(t,u) \in [-a,a]\times[0,1]$, on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,u)\right| = \left|\frac{ie^{it}}{(1+e^{it}u)^2}\right| = \frac{1}{\gamma(t,u)^2} \leqslant \frac{1}{m_a^2}.$$

et $u \mapsto \dfrac{1}{m_a^2}$ est intégrable sur $[0,1]$.

Ainsi l'application $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,u)$ est intégrable sur $[0,1]$, et d'autre part que la fonction $F : t \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{it}}{1+ue^{it}}\,\mathrm{d}u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment inclus dans $]-\pi,\pi[$, donc sur $]-\pi,\pi[$. On a de plus :

$$\forall t \in]-\pi,\pi[, \quad F'(t) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(t,u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{ie^{it}}{(1+e^{it}u)^2}\,\mathrm{d}u.$$

12. Soit $t \in]-\pi,\pi[$. On remarque que l'intégrande est de la forme $\dfrac{g'}{g^2}$ avec g la fonction $g : u \mapsto 1 + ue^{it}$. Ainsi :

$$F'(t) = i\left[-\frac{1}{1+ue^{it}}\right]_0^1 = i\left(1 - \frac{1}{1+e^{it}}\right) = \frac{ie^{it}}{1+e^{it}}.$$

Mais on a : $\dfrac{e^{it}}{1+e^{it}} = \dfrac{e^{it/2}}{e^{-it/2}+e^{it/2}} = \dfrac{e^{it/2}}{2\cos(t/2)} = \dfrac{\cos(t/2)+i\sin(t/2)}{2\cos(t/2)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}\tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$,

donc : $F'(t) = i\left(\dfrac{1}{2} + i\tan\left(\dfrac{t}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2}\tan\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{i}{2}$.

Comme $\tan = \dfrac{\sin}{\cos} = -\dfrac{\cos'}{\cos}$, une primitive de $t \mapsto -\tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ est $t \mapsto 2\ln\left(\left|\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)\right|\right)$.

Il existe donc une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que :

$$\forall t \in]-\pi,\pi[, \quad F(t) = \ln\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) + \frac{it}{2} + c.$$

Or le membre de droite est égal à c quand $t = 0$, tandis que celui de gauche est égal à $F(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \ln(2)$.
Par conséquent : $c = \ln(2)$.

Conclusion. $\forall t \in]-\pi,\pi[, \quad F(t) = \ln\left(2\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)\right) + \frac{it}{2}$.

13. Comme $\theta \in]0,2\pi[$, alors $\theta - \pi \in]-\pi,\pi[$, et on peut donc appliquer la question précédente pour obtenir la valeur de $F(\theta-\pi)$:

$$F(\theta-\pi) = \ln\left(2\cos\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)\right) + \frac{i(\theta-\pi)}{2} = \ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + \frac{i(\theta-\pi)}{2}$$

Mais on a aussi, du fait que $e^{i(\theta-\pi)} = e^{-i\pi}e^{i\theta} = -e^{i\theta}$:

$$F(\theta-\pi) = \int_0^1 \frac{e^{i(\theta-\pi)}}{1+ue^{i(\theta-\pi)}}\,\mathrm{d}u = -\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-ue^{i\theta}} = -L(1),$$

où L a été définie en début de section (on prend $z = e^{i\theta}$, qui vérifie bien $|z| \leqslant 1$ et $z \neq 1$ car $\theta \not\equiv 0 \bmod 2\pi$). On en déduit :

$$L(1) = -\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + \frac{i(\pi-\theta)}{2}.$$

Or, d'après la question 9 :

$$L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(e^{i\theta}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} + i\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}.$$

Par unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire, on en déduit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

14. • Le cosinus est borné par 1, donc d'après la question 2 la variable aléatoire $\cos(tX)$ est d'espérance finie pour tout $t \in \mathbb{R}$: Φ_X est bien définie.

   • Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme le cosinus est une fonction paire, on a : $\cos(tX) = \cos(-tX)$, donc les espérances de ces deux variables aléatoires sont les mêmes, et on a $\Phi_X(t) = \Phi_X(-t)$. Ceci prouve que Φ_X est une fonction paire.

   • Enfin, on a : $-1 \leqslant \cos(tX) \leqslant 1$, donc, par croissance de l'espérance : $E(-1) \leqslant E(\cos(tX)) \leqslant E(1)$, c'est-à-dire : $-1 \leqslant \Phi_X(t) \leqslant 1$. D'où le résultat.

15. D'après le théorème du transfert, pour tout t réel : $\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(x_n t) P(X = x_n)$.

Or, si l'on pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = \cos(x_n t) P(X = x_n)$, alors on a de suite : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leqslant P(X = x_n)$.

Comme la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} P(X = x_n)$ converge, par domination la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} \|f_n\|_\infty$ converge aussi.

Ainsi la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$, et chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}$. En tant que limite uniforme d'une série de fonctions continues, la fonction Φ_X est continue sur $\mathbb{R}$.

16. On nous suggère de démontrer préalablement la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} R_n \cos(nt)$. Pour cela, on note que d'après la propriété $(\mathcal{D}_\alpha)$, on a pour tout n au voisinage de $+\infty$:

$$R_n \cos(nt) = \alpha \frac{\cos(nt)}{n} + O\left(\frac{\cos(nt)}{n^2}\right) = \alpha \frac{\cos(nt)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est d'exposant $2 > 1$, elle converge, et donc par comparaison le terme en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente, donc convergente. On en déduit que les séries $\sum_{n \geqslant 0} R_n \cos(nt)$ et $\sum_{n \geqslant 1} \alpha \frac{\cos(nt)}{n}$ sont de même nature. Or la convergence de cette dernière série a été démontrée dans la question 13, donc la série $\sum_{n \geqslant 0} R_n \cos(nt)$ converge également.

Passons à la démonstration des deux identités vérifiées par Φ_X. Il est supposé que X est à valeurs entières : $X(\Omega) \subseteq \mathbb{Z} = \{n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Donc, d'après le théorème du transfert de la symétrie de X, on a :

$$\begin{aligned} \Phi_X(t) &= \cos(0 \cdot t) P(X = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(nt) P(X = n) + \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(-nt) P(X = -n) \\ &= P(X = 0) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(nt) P(X = n). \end{aligned}$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $P(|X| = n) = P(X = n) + P(X = -n) = 2P(X = n)$, tandis que pour $n = 0$ on a clairement $P(|X| = 0) = P(X = 0)$. Donc l'égalité ci-dessus peut se réécrire :

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(nt) P(|X| = n). \tag{$*$}$$

Ensuite, pour écrire le terme général en fonction de la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on note qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(|X| = n) = P(|X| \geqslant n) - P(|X| \geqslant n + 1) = R_n - R_{n+1},$$

donc :

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt).$$

À présent, montrons la formule alternative demandée. Comme la série $\sum_{n \geqslant 0} R_n \cos(nt)$ converge, il en est de même de la série $\sum_{n \geqslant 0} R_{n+1} \cos(nt)$ (qui s'écrit comme différence de deux séries convergentes), et on peut donc scinder la somme ci-dessus en deux :

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n \cos(nt) - \sum_{n=0}^{+\infty} R_{n+1} \cos(nt) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n \cos(nt) - \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos((n-1)t)$$

suite au changement d'indice $n \mapsto n + 1$ dans la deuxième somme. Par conséquent :

$$\Phi_X(t) = R_0 \cos(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \left(\cos(nt) - \cos((n-1)t)\right).$$

On a clairement : $R_0 = P(|X| \geqslant 0) = 1$, donc :

$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \left(\cos(nt) - \cos((n-1)t)\right).$$

d'où le résultat.

17. Implicitement, ce qu'on nous demande revient à démontrer que la somme $t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int}$ est définie au voisinage de 0 (par valeurs supérieures) et continue en 0. Or, si l'on pose : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int}$, alors f_n est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout entier $n \geqslant 1$, et on a : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f_n(t)| = \left|R_n - \frac{\alpha}{n}\right|$. On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\|f_n\|_\infty = \left|R_n - \frac{\alpha}{n}\right|$. D'après la propriété de dispersion $(\mathcal{D}_\alpha)$, on a donc : $\|f_n\|_\infty = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle est convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc converge uniformément sur $\mathbb{R}$. En particulier, en tant que limite uniforme d'une série de fonctions continues, la somme $t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Si l'on pose C sa valeur en 0 (qui est bien un nombre réel, vu que que pour $t = 0$ la somme ne fait intervenir que des nombres réels), on a bien :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} C.$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ au voisinage de 0 (en particulier : entre 0 et 2π strictement) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} R_n e^{int} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} + \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{int}}{n} \\ &\overset{[q.13]}{=} C + o(1) - \alpha \ln\left(2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) + i\alpha\frac{\pi - t}{2}.\end{aligned}$$

En identifiant la partie réelle (notons que $C \in \mathbb{R}$) et la partie imaginaire, on a donc, pour t au voisinage de 0 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = C - \alpha \ln\left(2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) + o(1), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \alpha\frac{\pi - t}{2} + o(1).$$

Comme $t = o(1)$ quand $t \to 0$, on peut écrire : $\alpha\frac{\pi - t}{2} = \frac{\alpha\pi}{2} + o(1)$. De plus :

$$\ln\left(2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) = \ln\left(2\left(\frac{t}{2} + o(t)\right)\right) = \ln(t + o(t)) = \ln(t) + \ln(1 + o(1)) = \ln(t) + O(1).$$

Donc finalement, les deux égalités ci-dessus deviennent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = -\alpha \ln(t) + C + O(1) = O(\ln(t)), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\alpha\pi}{2} + o(1),$$

ce qu'il fallait démontrer.

18. Soit $t \in \mathbb{R}$. Rappelons qu'on a montré :

$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \left(\cos(nt) - \cos((n-1)t)\right).$$

Or, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}\cos(nt) - \cos((n-1)t) &= -2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{(2n-1)t}{2}\right) = -2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(nt - \frac{t}{2}\right) \\ &= -2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\Phi_X(t) &= 1 - 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin\left(\frac{nt}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos\left(\frac{nt}{2}\right)\right]\\ &= 1 - \sin(t)\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin\left(\frac{nt}{2}\right) + 2\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos\left(\frac{nt}{2}\right).\end{aligned}$$

Grâce à la question précédente, on sait qu'on a au voisinage de 0 :

$$\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos\left(\frac{nt}{2}\right) = O\left(\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 \ln(t)\right) = O\left(t^2\ln(t)\right) = o(t),$$

car $t\ln(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, tandis qu'on a :

$$\sin(t)\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin\left(\frac{nt}{2}\right) = (t + o(t))\left(\frac{\pi\alpha}{2} + o(1)\right) = \frac{\alpha\pi t}{2} + o(t),$$

donc finalement, quand $t \to 0^+$:

$$\Phi_X(t) = 1 - \frac{\pi\alpha t}{2} + o(t),$$

ce qu'il fallait démontrer. Ce calcul montre en outre :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\Phi_X(t) - \Phi_X(0)}{t} = -\frac{\pi\alpha}{2}.$$

La fonction Φ_X étant paire, on en déduit :

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\Phi_X(t) - \Phi_X(0)}{t} \overset{[u=-t]}{=} \lim_{u\to 0^+} -\frac{\Phi_X(u) - \Phi_X(0)}{u} = \frac{\pi\alpha}{2}.$$

Comme $\alpha \neq 0$, on en déduit : $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\Phi_X(t)-\Phi_X(0)}{t} \neq \lim\limits_{t\to 0^-} \frac{\Phi_X(t)-\Phi_X(0)}{t}$, donc la fonction Φ_X n'est pas dérivable en 0.

Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables M_n

19. • Soit Z une variable symétrique. D'après la question 4 :

$$E\left(\sin\left(t(Z)\right)\right) = 0.$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E\left(e^{it(Z)}\right) = \underbrace{E\left(\cos\left(t(Z)\right)\right)}_{=\Phi_Z(t)} + i\,\underbrace{E\left(\sin\left(t(Z)\right)\right)}_{=0} = \Phi_Z(t).$$

• Comme $X+Y$ est symétrique il vient :

$$\Phi_{X+Y}(t) = E\left(e^{it(X+Y)}\right) = E\left(e^{itX}e^{itY}\right),$$

et comme X et Y sont indépendantes, c'est aussi le cas de e^{itX} et e^{itY} (lemme des coalitions), et par propriété de l'espérance :

$$E\left(e^{itX}e^{itY}\right) = E\left(e^{itX}\right)E\left(e^{itY}\right) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t).$$

20. On admet, dans le préambule du sujet, que X_{n+1} est indépendante de $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k = nM_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Cela nous permet d'une part de démontrer par récurrence que nM_n est symétrique pour tout entier $n \geqslant 1$ (utiliser la question 5), et donc M_n aussi, et d'autre part d'appliquer la question précédente avec $X = X_{n+1}$ et $Y = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Comme $X_{n+1} + \sum\limits_{k=1}^{n} X_k = \sum\limits_{k=1}^{n+1} X_k$, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \forall t \in \mathbb{R},\quad \Phi_{\sum\limits_{k=1}^{n+1} X_k}(t) = \Phi_{X_{n+1}}(t)\Phi_{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}(t).$$

De cela on tire, par une récurrence facile :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{\sum_{k=1}^{n} X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} \Phi_{X_k}(t).$$

Comme les X_k ont toutes la même loi que X_1, tous les $\cos(tX_k)$ ont même loi que $\cos(tX_1)$ d'après le théorème 1 du préambule, et comme l'espérance d'une variable aléatoire dépend uniquement de sa loi, on en déduit que les fonctions caractéristiques des X_k sont toutes égales à la fonction caractéristique de X_1. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{\sum_{k=1}^{n} X_k}(t) = \left(\Phi_{X_1}(t)\right)^n.$$

Or : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k = nM_n$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{nM_n}(t) = E\left(\cos(t(nM_n))\right) = E\left(\cos((tn)M_n)\right) = \Phi_{M_n}(nt).$$

Par conséquent, l'égalité ci-dessus équivaut à : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{M_n}(nt) = \left(\Phi_{X_1}(t)\right)^n$. Il reste à remplacer t par $\frac{t}{n}$ pour en déduire le résultat voulu :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = \left(\Phi_{X_1}(t/n)\right)^n.$$

21. Comme les fonctions Φ_{M_n} et $t \mapsto \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right)$ sont paires, il suffit de démontrer le résultat voulu pour t positif. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Quand $n \to +\infty$, on a $\frac{t}{n} \to 0$. Donc, d'après la question 18 (qu'on peut appliquer vu que par hypothèse, X_1 est symétrique et vérifie la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$) :

$$\left(\Phi_{X_1}(t/n)\right)^n = \left(1 - \frac{\pi\alpha t}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^{n\ln\left(1 - \frac{\pi\alpha t}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

(notons qu'on a bien $1 - \frac{\pi\alpha t}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ pour n suffisamment grand, ce qui autorise la forme logarithmique).
Or : $n\ln\left(1 - \frac{\pi\alpha t}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \left(-\frac{\pi\alpha t}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi\alpha t}{2}$. Par continuité de l'exponentielle, on en déduit :

$$\Phi_{M_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{\pi\alpha t}{2}\right) = \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right),$$

d'où le résultat si $t \geqslant 0$, et aussi pour $t < 0$ par parité.

22. Posons : $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right)$. Si la convergence de la question précédente est uniforme sur $\mathbb{R}$, alors on a aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |\Phi_{M_n}(2\pi n)| \leqslant |\Phi_{M_n}(2\pi n) - g(2\pi n)| + |g(2\pi n)| \leqslant \|\Phi_{M_n} - g\|_\infty + \exp\left(-\pi^2\alpha n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc d'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Phi_{M_n}(2\pi n) = 0$. Or, d'après la question 20 : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\Phi_{M_n}(2\pi n) = \left(\Phi_{X_1}(2\pi)\right)^n$. Le fait que cette suite géométrique converge vers 0 signifie qu'on a nécessairement : $|\Phi_{X_1}(2\pi)| < 1$. Or, d'après l'identité $(*)$ démontrée à la question 16 :

$$\Phi_{X_1}(2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(2\pi n) P(|X_1| = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(|X_1| = n) = P(|X_1| \geqslant 0) = 1,$$

ce qui contredit le fait que $|\Phi_{X_1}(2\pi)| < 1$.
Par l'absurde, on a montré que la convergence de la question précédente n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Fin de la correction du problème
