

Composition n° 6, concours blanc. Une correction

Exercice 1 - Algèbre linéaire

Partie I - Matrices compagnons

1. a) On a $\chi_M = \det(XI_n - M) = \det((XI_n - M)^\top) = \det(XI_n - M^\top) = \chi_{M^\top}$ donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \in \text{sp}(M) \Leftrightarrow \chi_M(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{M^\top}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \text{sp}(M^\top)$$

Ainsi $\text{sp}(M) = \text{sp}(M^\top)$ et donc M et $M^\top$ ont même spectre.

- b) $\Leftarrow$: On suppose que M est diagonalisable, ce qui nous fournit $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $M = PDP^{-1}$
 et alors $M^\top = (P^{-1})^\top D^\top P^\top = (P^\top)^{-1} DP^\top$
 d'où $M^\top$ est diagonalisable

$\Rightarrow$: On suppose que $M^\top$ est diagonalisable.

Pour montrer que M est diagonalisable, on utilise l'implication précédente en remarquant que $M = (M^\top)^\top$.

Conclusion. La matrice $M^\top$ est diagonalisable si et seulement si la matrice M est diagonalisable

- a) Calculons le polynôme caractéristique χ de C_Q . On note $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de C_Q .

$$\chi = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & X & 0 & \cdots & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & X & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{i=2}^n X^{i-1} L_i}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \\ -1 & X & 0 & \cdots & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & X & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Un développement selon la première ligne donne :

$$\chi = -(-1)^{n+1} P \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & X & \cdots & * \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{=(-1)^{n-1}} = P$$

- b) On a les équivalences :

$$\begin{aligned} (C_Q)^\top X = \lambda X &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 &= \lambda x_1 \\ x_3 &= \lambda x_2 \\ \vdots & \\ x_n &= \lambda x_{n-1} \\ -a_0 x_1 - \dots - a_{n-1} x_n &= \lambda x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ (-a_0 - a_1 \lambda - \dots - a_{n-1} \lambda^{n-1}) x_1 = \lambda^n x_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in \{2, \dots, n\}, x_i = \lambda^{i-1} x_1 \\ Q(\lambda) x_1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Comme λ est racine de Q ($\chi_{C_Q^\top} = \chi_{C_Q} = Q$), il vient : $\dim \left(E_\lambda \left(C_Q^\top \right) \right) = 1$, $E_\lambda \left(C_Q^\top \right) = \text{vect}(X_\lambda)$

$$\text{où } X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$

Partie II - Endomorphismes cycliques

3. a) Comme f est cyclique, il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E

Il existe alors $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $f^n(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0)$.

b) Le polynôme Q est unitaire de degré n et on a $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = C_Q$

4. • Si f est cyclique, d'après la question 3a, il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q , où Q est un polynôme unitaire de degré n .

• Réciproquement supposons qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q , où Q est un polynôme unitaire de degré n .

Alors : $\forall i \in \{0, \dots, n-2\}$, $f(e_i) = e_{i+1}$

donc $(e_0, f(e_0), f^2(e_0), \dots, f^{n-1}(e_0))$ est une base de E et donc f est cyclique

Conclusion. L'endomorphisme f est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q où Q est un polynôme unitaire de degré n .

5. $\Leftarrow$: On suppose que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

Ainsi $|\text{sp}(f)| = \deg(\chi_f) = \dim E$

donc f est diagonalisable d'après le cours

$\Leftarrow$: On suppose que f est diagonalisable. Comme f est cyclique,

ceci nous fournit $\mathcal{B}$ une base de E et $Q \in \mathbb{K}[X]$ unitaire de degré n tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = C_Q$ d'après 5.

Ainsi C_Q est diagonalisable et il en est de même pour $C_Q^\top$ d'après 2

Ainsi $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(f)} E_\lambda \left(C_Q^\top \right)$ d'où $n = \sum_{\lambda \in \text{sp}(C_Q^\top)} \dim \left(E_\lambda \left(C_Q^\top \right) \right)$

or on a $\forall \lambda \in \text{sp} \left(C_Q^\top \right)$, $\dim \left(E_\lambda \left(C_Q^\top \right) \right) = 1$ d'après 4 donc $|\text{sp} \left(C_Q^\top \right)| = n$

or d'après 1 : $\text{sp} \left(C_Q^\top \right) = \text{sp} \left(C_Q \right) = \text{sp} (f)$

donc f admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$

donc χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples

Conclusion. L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

6. • Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=0}^n \lambda_i f^i = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrons $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\lambda_i = 0$

Comme f est cyclique, ceci nous fournit $x \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E

donc $\sum_{i=0}^n \lambda_i f^i(x) = 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0_E$

ainsi $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\lambda_i = 0$ car $\mathcal{B}$ est libre

Conclusion. La famille $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$

- Supposons que $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ soit un polynôme annulateur de f . On écrit $Q = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$.

On a alors $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k = 0$ et par liberté de la famille $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ il vient :

$$\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1}.$$

Ainsi $Q = 0$.

Conclusion. Tout polynôme non nul annulateur de f est de degré supérieur ou égal à n .

Partie III - Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

- On note $N_x = \{m \in \mathbb{N}^* \mid (f^i(x))_{0 \leq i \leq m-1} \text{ libre}\}$.

On sait que $1 \in N_x$ car $x \neq 0_E$ et que $\forall m \geq n, m \notin N_x$ car $\dim E = n$

Ainsi N_x est une partie de $\mathbb{N}^*$ non vide majorée par $n-1$

donc N_x admet un plus grand élément $p \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi la famille $(f^i(x))_{0 \leq i \leq p-1}$ est libre et la famille $(f^i(x))_{0 \leq i \leq p}$ est liée.

Conclusion. Il existe un entier p strictement positif tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ soit libre et il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \dots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0$$

- On a $f(\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))) = \text{Vect}(f(x), f^2(x), f^3(x), \dots, f^p(x))$ car f linéaire

or $f^p(x) = -\alpha_0 x - \alpha_1 f(x) - \dots - \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) \in \text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$

d'où $f(\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))) \subset \text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$

Ainsi $\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est stable par f

- On note f_F l'endomorphisme induit par f sur F .

D'après ce qui précède $\mathcal{B} = (x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est une base de $\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$

On remarque que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f_F) = C_Q$ en notant $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{p-1} X^{p-1} + X^p$

d'où $\chi_{f_F} = Q$ or $\chi_{f_F} | \chi_f$ car f_F induit par f

Conclusion. Le polynôme $X^p + \alpha_{p-1} X^{p-1} + \dots + \alpha_0$ divise le polynôme χ_f .

- En reprenant les notations précédentes, on a $Q(f)(x) = 0$ et il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $PQ = \chi_f$

Ainsi $\chi_f(f) = P(f) \circ Q(f)$ donc $\chi(f)(x) = P(f)[Q(f)(x)] = P(f)(0) = 0$ car $P(f)$ linéaire

On a ainsi montré que : $\forall x \in E, \chi(f)(x) = 0$

or $\chi(f) \in \mathcal{L}(E)$ d'où $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul.

Exercice 2 - Analyse

- Question préliminaire** Par le théorème de sommation par paquets (qu'on peut utiliser ici sans hypothèse de sommabilité puisqu'on somme des termes positifs), avec le recouvrement $\mathbb{N} \setminus \{0\} = (2\mathbb{N} \setminus \{0\}) \sqcup (2\mathbb{N} + 1)$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \in 2\mathbb{N} \setminus \{0\}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \in 2\mathbb{N} + 1} \frac{1}{n^2} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell)^2} + \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2}.$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge évidemment (c'est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$), cette égalité peut se réécrire :

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

ce dont on déduit : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{3/4} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie I - Une première méthode

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La dérivée de $x \mapsto (\sin(x))^{n+1}$ est $x \mapsto (n+1)(\sin(x))^n \cos(x)$.

Pour obtenir une relation entre les intégrales $W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2} dx$ et $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n dx$, nous allons intégrer par parties afin d'abaisser le degré de l'exposant $n+2$. Plus précisément : pour obtenir l'exposant n , nous allons dériver $x \mapsto (\sin(x))^{n+1}$ et intégrer $x \mapsto \sin(x)$. La formule de l'intégration par parties donne alors :

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2} dx = [-\cos(x) \cdot (\sin(x))^{n+1}]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot (\sin(x))^n \cos(x) dx,$$

donc : $W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n (\cos(x))^2 dx$. En utilisant la formule : $\cos^2 = 1 - \sin^2$, on obtient :

$$W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n dx - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2} dx = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2},$$

c'est-à-dire $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, et ainsi : $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$.

b) On en déduit la relation demandée par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit P_n la proposition :

$$\ll W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \gg$$

Pour $n=0$ on a : $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$, et : $\frac{2^{2 \cdot 0}(0!)^2}{(2 \cdot 0 + 1)!} = 1 = W_1$, d'où P_0 . À présent, si $n \in \mathbb{N}$ est un entier tel que P_n , alors :

$$\begin{aligned} W_{2(n+1)+1} = W_{2n+3} &= \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1} \stackrel{[P_n]}{=} \frac{2n+2}{2n+3} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{(2n+2)^2}{(2n+3)(2n+2)} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{2^2 \cdot (n+1)^2 \cdot 2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)!} = \frac{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!}, \end{aligned}$$

d'où P_{n+1} .

Par théorème de la récurrence on peut conclure : $\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

3. • L'application $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ peut s'écrire $x \mapsto (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Or :

$$\forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}, \forall x \in]-1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)}{n!} x^n.$$

Posons $\alpha = -\frac{1}{2}$. Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $-x^2 \in]-1, 1[$, et on peut donc évaluer en $-x^2$ l'égalité ci-dessus pour obtenir :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right)}{n!} (-x^2)^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a : $\prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} \cdot (2k+1)\right) = \frac{(-1)^n}{2^n} \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)$.

Pour simplifier cette écriture, on multiplie et divise par le produit de tous les entiers pairs, afin de faire apparaître une factorielle, et on factorise chaque entier pair par 2. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \frac{\prod_{k=1}^n (2k)}{\prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{(2n)!}{2^n \prod_{k=1}^n k} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right) = \frac{(-1)^n}{2^n} \times \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} n!}.$

Comme, de plus, pour tout $x \in]-1, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a : $(-x^2)^n = (-1)^n x^{2n}$, on en déduit le développement en série entière plus compact :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}.$$

• Passons à l'arc sinus. On a :

$$\arcsin(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} t^{2n} dt.$$

Or la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}$ est de rayon de convergence 1, donc on peut l'intégrer terme à terme sur tout segment inclus dans $] -1, 1[$. On en déduit :

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

4. Soit $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. En posant $x = \sin(t) \in [0, 1[$ dans le développement en série entière de l'arc sinus, on obtient :

$$\arcsin(\sin(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{(\sin(t))^{2n+1}}{2n+1},$$

et $\arcsin(\sin(t)) = t$ car $t \in [0, \frac{\pi}{2}] \subseteq [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, d'où le résultat désiré (quitte à renommer t en x).

Conclusion. Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin(x))^{2n+1}$.

5. • Notons que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ converge aussi en $x = 1$. On a, pour tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{1}{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n} (2\pi n) \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \times \frac{1}{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}} > 0,$$

or la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge parce que son exposant est $\frac{3}{2} > 1$. Donc, d'après le

théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{1}{2n+1}$ converge.

- Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $g_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(\sin(x))^{2n+1}}{2n+1} ..$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $|g_n(x)| \leq \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1}$ et ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|g_n\|_{\infty} \leq \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1}.$$

Ainsi la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement donc uniformément sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Le théorème d'intégration terme à terme s'applique puisque de plus chaque g_n est continue :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(\sin(x))^{2n+1}}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1} (\sin(x))^{2n+1} dx,$$

6. D'après la question 2a on a : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{2n+1} dx = W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$. Par la question précédente et la question 4 :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Or on a facilement : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$ et ainsi $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. d'où avec la question

$$1 : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie II - Une seconde méthode

7. Soit $x \in]-1, 1[$. On a : $|x^2| < 1$, donc : $\frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{1-x^2} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$.

Ainsi : $\frac{\ln(x^2)}{x^2-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^{2n} \ln(x))$ pour tout $x \in]0, 1[$, et : $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^{2n} \ln(x)) dx$

On va utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.

- La fonction $f_n : x \mapsto -x^{2n} \ln(x)$ est continue par morceaux sur $]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0, 1[$ et sa somme est $h : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2-1}$, qui est une fonction continue sur $]0, 1[$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que chaque f_n est intégrable sur $]0, 1[$. Comme $f_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, cela équivaut à la convergence de son intégrale sur $]0, 1[$. Via une intégration par parties, où l'on dérive $x \mapsto -\ln(x)$ et intègre $x \mapsto x^{2n}$ et puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ln(x) = 0,$$

on obtient que :

$$\int_0^1 -x^{2n} \ln(x) dx = \int_0^1 -\frac{x^{2n}}{2n+1} dx = \left[-\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ln(x) \right]_0^1 + \frac{1}{2n+1} \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{(2n+1)^2},$$

sont de même nature (donc convergentes, puisque la seconde est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment), et on a :

$$\int_0^1 -x^{2n} \ln(x) dx = \left[-\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ln(x) \right]_0^1 + \frac{1}{2n+1} \int_0^1 x^{2n} dt = \frac{1}{(2n+1)^2},$$

Ainsi la fonction f_n est intégrable sur $]0, 1[$ et $\int_0^1 f_n(t) dt = \frac{1}{(2n+1)^2}$.

— Enfin la série numérique $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 |f_n(t)| dt$ est convergente (série de Riemann avec $2 > 1$)

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique : la fonction h est intégrable sur $]0, 1[$ avec :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-x^{2n} \ln(x)) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Ce calcul montre en passant que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx$ converge, étant donné que cette somme est finie (la famille de réels positifs $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ est sommable puisque sa somme est celle d'une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc ses familles extraites sont sommables également).

8. Nous allons utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

On pose : $\forall (x, t) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad g(x, t) = \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}$.

- pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'application $t \mapsto g(x, t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$;
- pour tout $(t, x) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a :

$$|g(x, t)| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

et l'application φ est intégrable sur $[0, +\infty[$ ($\arctan \dots$)

Par le théorème de continuité sous le signe intégrale, d'une part $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, et d'autre part f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

9. On reprend les notations de la question précédente. Nous allons utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres :

- pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^1 sur $]0, 1]$ et on a :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times]0, 1], \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{1+(xt)^2} \frac{1}{1+t^2};$$

- pour tout $x \in]0, 1]$, l'application $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question précédente ;
- pour tout $x \in]0, 1]$, l'application $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$;
- pour tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, 1]$ et tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times [a, b]$, on a :

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t}{(1+(at)^2)(1+t^2)} = \varphi(t).$$

Justifions que l'application φ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Elle est continue sur cet intervalle, et on a :

$$\varphi(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a^2} \frac{1}{t^3} > 0,$$

or on sait que les fonctions de Riemann d'exposant strictement supérieur à 1 sont intégrables au voisinage de $+\infty$, donc par comparaison il en est de même de φ .

Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, vérifié sur tout segment de $]0, 1]$, d'une part $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $x \in]0, 1]$, et d'autre part f est de classe C^1 sur $]0, 1]$. De plus :

$$\forall x \in]0, 1], \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+(xt)^2} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

10. Soit $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times]0, 1[$. On a :

$$\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2 x^2} = \frac{t(1+t^2 x^2) - x^2 t(1+t^2)}{(1+t^2)(1+t^2 x^2)} = (1-x^2) \frac{t}{(1+t^2)(1+t^2 x^2)}$$

et on en déduit, par la question précédente :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, 1[, \quad f'(x) &= \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2 x^2} \right) dt = \frac{1}{1-x^2} \left[\frac{\ln(1+t^2) - \ln(1+t^2 x^2)}{2} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1-x^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+t^2}{1+t^2 x^2} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\ln \left(\frac{1}{x^2} \right)}{2(1-x^2)} = -\frac{\ln(x)}{1-x^2}, \end{aligned}$$

d'où le résultat, quitte à multiplier par -1 le dénominateur.

11. On a : $f(0) = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0$, $f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2} dt = \left[\frac{\arctan(t)^2}{2} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}$, En intégrant la relation de la question précédente, on a l'existence de $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f(x) = c + \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2 - 1} dt.$$

Calculons la limite de chaque membre en 0. Comme l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx$ converge par la question 7, on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2 - 1} dt = 0$.

De plus f est continue en 0 par la question 8, donc : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$. Ainsi l'égalité ci-dessus donne, quand $x \rightarrow 0$: $0 = c$.

Cette même égalité donne, quand $x \rightarrow 1$, toujours par continuité de f : $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx = f(1) = \frac{\pi^2}{8}$.

On en déduit, par la question 7 : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. On conclut avec la question 1, et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 3 - Probabilités

Partie I - Une variable aléatoire de loi de Poisson

1. Une première inégalité.

a) On utilise l'inégalité de Tchébychev ; pour tout $a > 0$ on a : $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{\sigma_X^2}{a^2}$.

Mais X suit une loi de POISSON de paramètre λ donc $\sigma_X^2 = \lambda$ et en prenant $a = \lambda$ on obtient

$$P(|X - E(X)| \geq \lambda) \leq \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

b) Comme on a $E(X) = \lambda$, $X - E(X) = X - \lambda$ et :

$$|X - E(X)| \geq \lambda = \underbrace{[X - \lambda \geq \lambda] \sqcup [\lambda - X \geq \lambda]}_{=[X \geq 2\lambda]}$$

donc $P(|X - \lambda| \geq \lambda) \geq P(X \geq 2\lambda)$ et ainsi ($\spadesuit$) : $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$.

2. Une amélioration de l'inégalité (♠)

a) La variable aléatoire X suit un loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

et ainsi pour tout t réel on a : $P(X = k)t^k = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Mais pour tout t réel la série de terme général $\frac{(\lambda t)^k}{k!}$ converge de somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{\lambda t}$ ce qui

justifie l'existence de $G_X(t)$ ainsi que l'égalité : $G_X(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}$.

b) Soit $t \geq 1$ et $a > 0$. La variable aléatoire e^{tX} est positive : selon l'inégalité de Markov, pour tout $\alpha > 0$ on a :

$$P(e^{tX} \geq \alpha) \leq \frac{E(e^{tX})}{\alpha}.$$

En prenant $\alpha = t^a = e^{a \ln t}$, il vient : $P(e^{tX} \geq e^{a \ln t}) \leq \frac{E(e^{tX})}{t^a}$.

Or $P(e^{tX} \geq e^{a \ln t}) = P\left(X \geq a \frac{\ln t}{t}\right)$ et comme $\ln t \leq t-1 \leq t$ il vient : $[X \geq a] \subset \left[X \geq a \frac{\ln t}{t}\right]$.

On peut alors conclure, par croissance de la mesure de probabilité, que : $P(X \geq a) \leq \frac{E(e^{tX})}{t^a}$.

c) La fonction g est dérivable sur $[1, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour $t \geq 1$ on a :

$$g'(t) = \frac{e^{t-1}(t-2)}{t^3}$$

Ainsi g est strictement décroissante sur $[1, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$: elle admet **un minimum global strict** en $t = 2$ dont la valeur est $g(2) = \frac{e}{4}$.

d) En prenant $a = 2\lambda$ dans l'inégalité obtenue à la question 2b on obtient pour tout $t \geq 1$:

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{G_X(t)}{t^{2\lambda}} = \frac{e^{\lambda(t-1)}}{t^{2\lambda}} = (g(t))^\lambda$$

Ceci étant valable pour tout $t \geq 1$ il vient alors :

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\min_{t \geq 1} g(t)\right)^\lambda = g(2)^\lambda = \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$$

3. On pose pour $\lambda > 0$: $\varphi(\lambda) = \lambda \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$.

Comme $\frac{e}{4} \in]0, 1[$ on obtient (par croissances comparées) : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \varphi(\lambda) = 0$.

Il existe ainsi A réel tel que si $\lambda \geq A$ on ait $\varphi(\lambda) < 1$ ce qui implique : $\left(\frac{e}{4}\right)^\lambda < \frac{1}{1 + \lambda}$.

Conclusion. Pour λ grand l'inégalité obtenue à la question 2d améliore donc celle de la question 1b.

Partie II - Variables à valeurs dans $\mathbb{N}$

4. On a : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k)$, et donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n kP(X = k) &= \sum_{k=0}^n k(P(X > k - 1) - P(X > k)) = \sum_{k=0}^n [kP(X > k - 1) - (k + 1)P(X > k) + P(X > k)] \\ &= \sum_{k=0}^n P(X > k) + \sum_{k=0}^n [kP(X > k - 1) - (k + 1)P(X > k)] = \sum_{k=0}^n P(X > k) - (n + 1)P(X > n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n). \end{aligned}$$

Regardons comment en déduire l'expression de l'espérance demandée dans l'énoncé. Comme X admet une espérance, on sait que $E(X)$ est la limite quand $n \rightarrow +\infty$ du membre de gauche. Il suffit donc de montrer, pour avoir le résultat voulu :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nP(X > n) = 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq nP(X > n) = n \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k),$$

et le membre de droite est le reste d'une série convergente (puisque par hypothèse X est d'espérance finie), donc converge vers 0. D'après le théorème des gendarmes, on a la limite nulle voulu. Quand

$$n \rightarrow +\infty, \text{ l'égalité précédente donne donc comme attendu : } E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$$

Autre démonstration. Cette formule découle très rapidement du théorème de Fubini positif. Notons $1_{[k+1, +\infty[} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction indicatrice de $[k + 1, +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{[k+1, +\infty[}(n)P(X = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} 1_{[k+1, +\infty[}(n)P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n) = E(X), \end{aligned}$$

d'où le résultat... Mais ce n'était pas semble-t-il le point de vue espéré par la question

5. On a : $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Si l'on note X_i le résultat du i^{e} tirage pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, alors on a :

$$(X \leq k) = \left(\max_{1 \leq i \leq p} X_i \leq k \right) = \bigcap_{i=1}^p (X_i \leq k).$$

Comme les X_i sont indépendantes (c'est en tout cas une hypothèse raisonnable, au vu de l'expérience modélisée), on a :

$$P(X \leq k) = \prod_{i=1}^p P(X_i \leq k).$$

Comme les X_i suivent une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ (en effet le tirage est supposé équiprobable), on conclut :

$$P(X \leq k) = \prod_{i=1}^p \frac{k}{n} = \left(\frac{k}{n} \right)^p.$$

Remarquons que cette expression reste valable pour $k = 0$. La loi de X s'obtient en écrivant :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1) = \left(\frac{k}{n} \right)^p - \left(\frac{k-1}{n} \right)^p.$$

6. Plusieurs méthode pour calculer cette limite.

• **Méthode 1**

L'application $x \mapsto x^p$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc par le théorème sur les sommes de Riemann on a directement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1},$$

Or par la question 4 (qui s'applique puisqu'une variable aléatoire d'image finie est d'espérance finie) on a :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - P(X \leq k)) = n - \sum_{k=0}^{n-1} P(X \leq k).$$

Par la question précédente : $E(X) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p = n \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p\right)$. Il est raisonnable de penser que $p \geq 1$, auquel cas : $\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{2} < 1$, et donc par ce qui précède : $E(X) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \left(1 - \frac{1}{p+1}\right)$.

• **Méthode 2**

L'application $x \mapsto x^p$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$ pour $p \geq 1$, une comparaison série-intégrale permet d'obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \int_1^n x^p dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} k^p \leq \int_0^{n-1} x^p dx \leq \int_0^n x^p dx.$$

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} k^p \leq \frac{n^{p+1}}{p+1}$.

Or on a facilement : $\frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}$. D'où : $\sum_{k=1}^{n-1} k^p \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}$. On retrouve alors la limite calculée ci-dessus :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1}.$$

Partie III - Transformée de Laplace

7. a) Comme $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, X est d'image finie, donc pour tout t réel, il en va de même de la variable aléatoire e^{tX} , et cette dernière est donc d'espérance finie.

Ainsi $\mathcal{D}_X = \mathbb{R}$ et par théorème de transfert, pour tout t réel on a :

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \sum_{k=0}^n e^{kt} P(X = k) = \sum_{k=0}^n e^{kt} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^t p)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (1-p + pe^t)^n \end{aligned}$$

b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Par théorème de transfert, e^{tX} est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_{k \geq 0} e^{tk} P(X = k)$ converge (absolument).

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $e^{tk} P(X = k) = p(1-p)^{k-1} e^{tk} = \frac{p}{1-p} ((1-p)e^t)^k$. C'est le terme général d'une série géométrique de raison $(1-p)e^t$ qui converge si et seulement si $e^t < \frac{1}{1-p}$ (tout est positif) i.e. $t < -\ln(1-p)$.

Ainsi $\mathbb{E}(e^{tX})$ existe si et seulement si $t < -\ln(1-p)$.

De la $D_X =]-\infty, -\ln(1-p)[$, et pour tout $t \in \mathcal{D}_X$ on a :

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in \mathcal{D}_X$. Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes. Par le lemme des coalitions, il en va de même des variables aléatoires $e^{tX_1}, \dots, e^{tX_n}$.

Ainsi comme elle sont toutes d'espérance finie, le cours permet de dire que la variable aléatoire

$\prod_{k=1}^n e^{tX_k}$ est d'espérance finie avec :

$$E\left(\prod_{k=1}^n e^{tX_k}\right) = \prod_{k=1}^n E(e^{tX_k}),$$

ce qui donne de suite : $\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{x_k}(t)$.

9. Soit $t \in \mathcal{D}_X$. On applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire positive e^{tX} qui est d'espérance finie :

$$P(e^{tX} \geq e^{ta}) \leq \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}}.$$

On obtient donc pour $t > 0$: $P(X \geq a) \leq e^{-ta} \varphi_X(t)$.

10. a) Comme X est bornée, pour tout t réel la variable aléatoire e^{tX} l'est également donc est d'espérance finie. Ainsi $\mathcal{D}_X = \mathbb{R}$ et par théorème de transfert, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$.

b) On utilise le théorème de dérivation terme à terme.

- La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction u_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$|u'_n(t)| = |x_n| u_n(t) \leq \underbrace{MNP(X = x_n)}_{\text{indépendant de } t},$$

donc $\|u_n\|_\infty \leq MNP(X = x_n)$.

Il en résulte que la série de fonction $\sum u'_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de dérivation terme à terme s'applique : la fonction $\varphi_X = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec, pour t réel :

$$\varphi'_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n u_n(t).$$

Pour $t = 0$ cela donne : $\varphi'_X(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n) = E(X)$.

FIN
