Composition n° 6, concours blanc

Le lundi 3 mars 2025

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*La **présentation** de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.*

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Exercice 1 - Algèbre linéaire

Notations et définitions

Dans tout l'exercice, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et n est un entier naturel.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $A^\top$ la transposée de la matrice A, $\mathrm{rg}(A)$ son rang, $\mathrm{tr}(A)$ sa trace, $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique et $\mathrm{sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres dans $\mathbb{K}$.

Dans tout l'exercice, E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ de dimension finie n supérieure ou égale à 2, et $\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E. On note f un endomorphisme de E.

On note $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{k+1} = f^k \circ f$.

Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m$, $Q(f)$ désigne l'endomorphisme $a_0\mathrm{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_m f^m$. On note $\mathbb{K}[f]$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ constituée des endomorphismes $Q(f)$ quand Q décrit $\mathbb{K}[X]$.

De même, on utilise les notations suivantes, similaires à celles des matrices, pour un endomorphisme f de E : $\mathrm{rg}(f)$, $\mathrm{tr}(f)$, χ_f et $\mathrm{sp}(f)$.

Enfin, on dit que f est *cyclique* si et seulement s'il existe un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

Partie I - Matrices compagnons

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   a) Démontrer que M et $M^\top$ ont même spectre.
   b) En revenant à la définition d'une matrice diagonalisable, démontrer que $M^\top$ est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.
2. Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. On considère la matrice

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

   a) Déterminer en fonction de Q le polynôme caractéristique de C_Q.
   b) On suppose que λ une valeur propre de $C_Q^\top$ et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ un vecteur propre colonne associé.

   Montrer que $\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ -a_0x_1 - \ldots - a_{n-1}x_n = \lambda x_n \end{cases}$.

   En déduire la dimension et une base du sous-espace propre associé.

Partie II - Endomorphismes cycliques

3. On suppose dans cette question que f est cyclique.

   a) Justifier de l'existence de x_0 et de $\lambda_0, \dots \lambda_{n-1}$ dans $\mathbb{K}$ dans E tels que $f^n(x_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$.

   b) On pose $Q = X^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-\lambda_k) X^k$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q

4. Démontrer que f est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q, où Q est un polynôme unitaire de degré n.
5. On suppose que f est cyclique. Démontrer que f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.
6. On suppose que f est cyclique. Démontrer que la famille $(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.
   En déduire que tout polynôme annulateur non nul de f est de degré supérieur ou égal à n.

Partie III - Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

Soit x un vecteur non nul de E.

7. Justifier qu'il existe un entier p strictement positif tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ soit libre et qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0$$

8. Justifier que $F = \mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est stable par f.
9. En considérant l'endomorphisme f_F induit par f sur F, démontrer que $X^p + \alpha_{p-1} X^{p-1} + \cdots + \alpha_0$ divise le polynôme χ_f.
10. Démontrer que $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul.

Exercice 2 - Analyse

Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Cet exercice propose deux méthodes de recherche de la valeur de cette somme.

1. **Question préliminaire**

   Si on admet que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, que vaut la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

Partie I - Une première méthode

2. Pour tout entier naturel n, on note $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n \,\mathrm{d}x$.

   a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto (\sin(x))^{n+1}$, puis déterminer une relation entre W_{n+2} et W_n.

   b) En déduire, pour tout entier naturel n, que $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

3. Déterminer sur l'intervalle $]-1,1[$ le développement en série entière de la fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$ on a : $\arcsin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

4. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}(\sin(x))^{2n+1}$.
5. Justifier que l'on peut écrire : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}(\sin(x))^{2n+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}(\sin(x))^{2n+1}\mathrm{d}x$.
6. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Partie II - Une seconde méthode

On pose pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

7. Donner sur l'intervalle $]-1, 1[$ le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$, puis exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ sous la forme de la somme d'une série numérique.
8. Démontrer que la fonction f est bien définie et est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
9. Établir que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]0, 1]$ et exprimer $f'(x)$ comme une intégrale.
10. Réduire au même dénominateur l'expression $\dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{x^2 t}{1+t^2x^2}$.

    En déduire que pour tout $x \in]0, 1[$, $f'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$.
11. Calculer $f(1)$, puis en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 3 - Probabilités

Cet exercice est constitué de trois parties indépendantes.

Partie I - Une variable aléatoire de loi de Poisson

Dans toute cette partie, X est une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. **Une première inégalité.**
   a) Montrer que $P(|X - \lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.
   b) En déduire l'inégalité :
   $$(\spadesuit)\quad P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}$$
2. **Une amélioration de l'inégalité ($\spadesuit$)**

   Pour tout réel t, on pose : $G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)t^k$.

   a) Justifier l'existence de $G_X(t)$ et montrer que : $G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.
   b) Montrer que : $\forall t \in [1, +\infty[, \quad \forall a > 0, \quad P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{G_X(t)}{t^a}$
   c) Déterminer le minimum sur $[1, +\infty[$ de la fonction $g : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{t-1}}{t^2}$.
   d) En déduire que : $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)^{\lambda}$.
3. Montrer que cette dernière amélioration est meilleure que celle obtenue à la question 1b dès que λ prend des valeur assez grandes.

Partie II - Variables à valeurs dans $\mathbb{N}$

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance finie.

4. Exprimer, pour k non nul, $P(X = k)$ en fonction de $P(X > k-1)$ et de $P(X > k)$.

   Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n)$.

   Démontrer le résultat de cours : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$.

5. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue, de façon équiprobable, p tirages successifs avec remise et on note X le plus grand nombre obtenu.
   Calculer, pour tout entier naturel k, $P(X \leqslant k)$, puis donner la loi de X.

6. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p$, puis en utilisant la question 4, déterminer un équivalent pour n au voisinage de $+\infty$ de $E(X)$.

Partie III - Transformée de Laplace

Dans cette partie, X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note $\mathcal{D}_X$ l'ensemble des t réels tels que la variable aléatoire e^{tX} soit d'espérance finie et on pose pour tout $t \in \mathcal{D}_X$:

$$\varphi_X(t) = E(\mathrm{e}^{tX}).$$

On considère également une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires suivant toutes la même loi que X.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

7. Déterminer la fonction φ_X dans les deux cas suivant (en précisant $\mathcal{D}_X$).
   a) $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.
   b) $X \sim \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$.

8. Démontrer que φ_{S_n} est définie sur $\mathcal{D}_X$ et que l'on a l'égalité de fonctions : $\varphi_{S_n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}$.

9. Soit $a > 0$. Démontrer que pour tout t strictement positif dans $\mathcal{D}_X$ on a : $P(X \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-ta}\varphi_X(t)$.

10. On suppose désormais que X est bornée par M et que $X(\Omega)$ est dénombrable avec $X(\Omega) = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
    On suppose également qu'il existe $N \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $t \in \mathcal{D}_X$ on ait $\mathrm{e}^{tX} \leqslant N$.
    Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$ on pose $u_n(t) = \mathrm{e}^{tx_n}P(X = x_n)$.
    a) Exprimer la fonction φ comme la fonction somme d'une suite de fonctions.
    b) Démontrer que φ_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $E(X) = \varphi'_X(0)$.

FIN
