Composition n° 5 bis, une correction

A. Fonctions L et P

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{|z|^n}{n} \leqslant |z|^n$ et $\sum |z|^n$ est une série géométrique convergente (puisque $|z| < 1$).
Par comparaison, $\sum \frac{z^n}{n}$ est une série absolument convergente, donc convergente.
D'après le cours sur les séries entières, on a :
$$\forall z \in \left]-1,1\right[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z).$$

2. • Tout d'abord, pour $t \in [0,1]$, on a $tz \in D$ et : $\underbrace{L(tz)}_{=\varphi(t)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} t^n$.
Par une conséquence directe de la règle de d'Alembert, cette série entière de la variable réelle t est de rayon de convergence $\frac{1}{|z|}$ si $z \neq 0$ et $+\infty$ si $z = 0$.
Dans tous les cas, le rayon de convergence est strictement supérieur à 1.
Par théorème, sa somme est dérivable (au moins) sur l'intervalle ouvert de convergence, qui contient $[0,1]$ et :
$$\forall t \in [0,1], \varphi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n t^{n-1} = \frac{z}{1-zt}\cdot$$
•La fonction $\psi : t \mapsto (1-tz)e^{L(tz)}$ est dériv able comme produit de fonctions dérivables sur $[0,1]$ et :
$$\forall t \in [0,1], \psi'(t) = \Big((1-tz)\frac{z}{1-zt} - z\Big)e^{L(tz)} = 0.$$
Comme $[0,1]$ est un intervalle, on peut conclure : ψ est une fonction constante et, en particulier, $\psi(1) = \psi(0)$, qui se réécrit :
$$(1-z)e^{L(z)} = e^{L(0)} \quad \text{donc} \quad e^{L(z)} = \frac{1}{1-z}\cdot$$

3. Soit $z \in D$. Par l'inégalité triangulaire, on a :
$$|L(z)| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n} \underset{|z|\in[0,1[}{=} -\ln(1-|z|).$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $z^n \in D$, donc $|L(z^n)| \leqslant \underbrace{-\ln(1-|z|^n)}_{=a_n}$.
Comme $|z| < 1$, la suite (z^n) converge vers 0, puis $a_n \sim |z|^n$.
On en déduit $L(z^n) = O(z^n)$ puis, par comparaison à une série géométrique, la série $\sum L(z^n)$ est absolument convergente, donc convergente.

B. Développement de P en série entière

4. • Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, \dots, a_N) \in P_{n,N}$.
Par positivité des a_k, on a $0 \leqslant a_i \leqslant i a_i \leqslant n$ pour tout $i \in [\![1, N]\!]$.
On en déduit l'inclusion $P_{n,N} \subset [\![0, n]\!]^N$, puis le caractère fini de l'ensemble $P_{n,N}$ comme partie d'un ensemble fini.

- Notons $f : (a_1, \dots, a_N) \mapsto (a_1, \dots, a_N, 0)$.
Par définition des ensembles $P_{n,N}$ et $P_{n,N+1}$, l'application f est bien définie de $P_{n,N}$ vers $P_{n,N+1}$ et également injective par vérification immédiate.
On en déduit $p_{n,N} \leqslant p_{n,N+1}$, ce qui montre que la suite $(p_{n,N})_{N \geqslant 1}$ est croissante.

• Dans le cas où $n = 0$, on a évidemment $P_{0,N} = \{(0, \dots, 0)\}$ donc $p_{0,N} = 1$ pour tout $N \geqslant 1$ et donc la suite $(p_{n,N})_{N \geqslant 1}$ est constante à partir du rang $1 = \max(n, 1)$.
Supposons $n \geqslant 1$. Soit $N \geqslant n$.
Soit $(a_1, \dots, a_{N+1}) \in P_{n,N+1}$. Si $a_{N+1} \geqslant 1$, alors $(N+1)a_{N+1} \geqslant (N+1)$ donc :
$$n = \sum_{k=1}^{N+1} k a_k \geqslant (N+1)a_{N+1} \geqslant N+1 > n,$$

ce qui est absurde.

Ainsi, $(a_1, \dots, a_{N+1}) = (a_1, \dots, a_N, 0)$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} k a_k = n$ puis $(a_1, \dots, a_N) \in P_{n,N}$.

Ceci montre que la fonction f du premier point est aussi surjective donc bijective.

On en déduit $p_{n,N} = p_{n,N+1}$.

En conclusion, la suite $(p_{n,N})_{N\geqslant 1}$ est constante à partir du rang $\max(n, 1)$.

5. Soit $z \in D$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on définit la propriété H_n par :

$$\underbrace{\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k}}_{=\Pi_N} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n.$$

— On a évidemment $P_{n,1} = \{(n)\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,1} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z},$$

ce qui achève de montrer l'initialisation.

— Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Supposons H_N.

Tout d'abord, par conséquence de la question précédente (premier point), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_{n,N}|z|^n \leqslant (n+1)^N |z|^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad \text{(croissance comparée)}$$

ce qui montre la sommabilité de la famille $(p_{n,N} z^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Par ailleurs, la famille $(z^{i(N+1)})_{i\in\mathbb{N}}$ est également sommable (puisque $|z| < 1$).

Ainsi, la famille $\left(p_{n,N} z^{n+i(N+1)}\right)_{(n,i)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et :

$$\begin{aligned}
\Pi_{N+1} &= P_N \times \frac{1}{1-z^{N+1}} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} p_{n,N} z^n \sum_{i\in\mathbb{N}} z^{i(N+1)} \quad \text{(hypothèse de récurrence et série géométrique)} \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{(n,i)\in\mathbb{N}^2 \\ n+(N+1)i=j}} p_{n,N} \right) z^j \quad \text{(sommabilité)} \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} p_{j,N+1} z^j,
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de l'hérédité.

Détaillons un peu la dernière égalité. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
p_{j,N+1} &= \operatorname{card}\left\{(a_1, \dots, a_{N+1}) \in \mathbb{N}^{N+1}, a_1 + \dots + (N+1)a_{N+1} = j\right\} \\
&= \sum_{\substack{i\in\mathbb{N} \\ (N+1)i\leqslant j}} \operatorname{card}\left\{(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{N}^N, a_1 + \dots + N a_N = j - (N+1)i\right\} \\
&= \sum_{\substack{i\in\mathbb{N} \\ (N+1)i\leqslant j}} p_{j-(N+1)i,N} = \sum_{\substack{(n,i)\in\mathbb{N}^2 \\ n+(N+1)i=j}} p_{n,N}.
\end{aligned}$$

6. • Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de la suite $(p_{n,N})_{N\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\sum_{(n,N)\in\mathbb{N}^2} \left|p_{n,N+1} - p_{n,N}\right| |z|^n = \sum_{(n,N)\in\mathbb{N}^2} \left(p_{n,N+1} - p_{n,N}\right) |z|^n.$$

Le calcul (formel) qui suit, en remplaçant z par $|z|$ (toujours élément de D), montrera donc la sommabilité de la famille $\left((p_{n,N+1}-p_{n,N})z^n\right)_{(n,N)\in\mathbb{N}^2}$ et justifiera le résultat final.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n z^n &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{N\in\mathbb{N}} (p_{n,N+1}-p_{n,N})z^n && (p_n=\lim_{N\to+\infty} p_{n,N} \text{ et } p_{n,0}=0)\\
&= \sum_{N\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} (p_{n,N+1}-p_{n,N})z^n\\
&= \sum_{N\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} p_{n,N+1}z^n-\sum_{n\in\mathbb{N}} p_{n,N}z^n\Big) && \text{(les deux séries convergent)}\\
&= \sum_{N\in\mathbb{N}^*}\big(\Pi_{N+1}-\Pi_N\big)+\Pi_1-0 && \text{(question précédente)}\\
&= P(z). && (\lim_{N\to+\infty}\Pi_N=P(z))
\end{aligned}$$

Comme $P(|z|)<+\infty$, la sommabilité et donc le résultat du calcul précédent sont justifiés.

• La série $\sum p_n z^n$ est convergente pour tout $z\in D$ donc son rayon de convergence R est supérieur ou égal à 1.
Par ailleurs, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $p_{n,1}=1$ donc $p_n\geqslant 1$, ce qui montre que $R\leqslant 1$.
En conclusion, $R=1$.

7. Soit $t>0$. Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on a $e^{-t+i\theta}\in D$ donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{e^{-in\theta}P(e^{-t+i\theta})}_{=f(\theta)}d\theta \quad=\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\underbrace{p_k e^{-kt}e^{i(k-n)\theta}}_{=f_k(\theta)}d\theta$$

Chaque fonction f_k est intégrable sur $[-\pi,\pi]$, la série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur $[-\pi,\pi]$ vers la fonction continue f et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f_k(\theta)|d\theta \quad=\quad \sum_{k=0}^{+\infty}2\pi p_k(e^{-t})^k<+\infty \quad \text{car} \quad |e^{-t}|<1.$$

Par théorème d'intégration terme à terme, on a donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{-in\theta}P(e^{-t+i\theta})d\theta=\sum_{k=0}^{+\infty}p_k e^{-kt}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k-n)\theta}d\theta}_{=2\pi\delta_{k,n}}=2\pi p_n e^{-nt},$$

ce qui conclut.

C. Contrôle de P

8. • Toutes les séries qui suivent sont convergentes (par comparaison à la série géométrique $\sum x^n$).
Partant de l'inégalité :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\underbrace{\frac{x^n}{n}}_{\geqslant 0}\underbrace{(\cos(n\theta)-1)}_{\leqslant 0}\leqslant 0,$$

on en déduit : $\ln(1-x)+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\cos(n\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}(\cos(n\theta)-1)\leqslant x(\cos\theta-1)$,
puis : $\ln(1-x)+\Re L(xe^{i\theta})\leqslant x(\cos\theta-1)$.
Par croissance de l'exponentielle, il vient :

$$(1-x)\exp\big(\Re L(xe^{i\theta})\big)\leqslant\exp(x(\cos\theta-1)) \quad\text{puis}\quad (1-x)\big|\exp L(xe^{i\theta})\big|\leqslant\exp(-(1-\cos\theta)x).$$

D'après la question 2, on a alors :

$$(1-x)\frac{1}{|1-xe^{i\theta}|}\leqslant\exp(-(1-\cos\theta)x),$$

ce qui conclut cette première partie de la question puisque $1-x\geqslant 0$.

• Ensuite, on a : $P(xe^{i\theta})=\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{1-x^k e^{ik\theta}}$ et $P(x)=\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{1-x^k}$.
Par quotient et passage au module, il vient :

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right|=\lim_{N\to+\infty}\prod_{k=1}^{N}\left|\frac{1-x^k}{1-x^k e^{ik\theta}}\right|.$$

Comme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $x^k \in [0,1[$ et $k\theta \in \mathbb{R}$, on peut utiliser la première partie de la question :

$$\left|\frac{1-x^k}{1-x^k e^{ik\theta}}\right| \leqslant \exp(-(1-\cos(k\theta))x^k).$$

Par produit d'inégalités dont les termes sont positifs et passage à la limite, on obtient :

$$\begin{aligned}\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leqslant \lim_{N\to+\infty}\prod_{k=1}^{N}\exp\big(-(1-\cos(k\theta))x^k\big) \qquad &= \exp\textstyle\sum_{k=0}^{+\infty}\underbrace{-(1-\cos k\theta)x^k}_{=0 \text{ si } k=0}\\ &= \exp\Big(-\tfrac{1}{1-x}+\Re\textstyle\sum_{k=0}^{+\infty}e^{ik\theta}x^k\Big)\\ &= \exp\Big(-\tfrac{1}{1-x}+\Re\tfrac{1}{1-xe^{i\theta}}\Big).\end{aligned}$$

9. On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x}-\Re\frac{1}{1-xe^{i\theta}} \quad &= \quad \frac{1}{1-x}-\Re\frac{1-xe^{-i\theta}}{|1-xe^{i\theta}|^2}=\frac{1}{1-x}-\frac{1-x\cos\theta}{1+x^2-2x\cos\theta}\\ &= \quad \frac{1+x^2-2x\cos\theta-(1-x)(1-x\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))}=\frac{x^2(1-\cos\theta)+x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))}\\ &\geqslant \quad \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))}\cdot \quad \big(x^2(1-\cos\theta)\geqslant 0\big)\end{aligned}$$

D'après ce qui précède et la question précédente, on a :

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(\underbrace{-\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))}}_{=A(x)}\right).$$

Dans le cas où $A(x) \leqslant -\frac{1}{3(1-x)}$, il n'y a rien à faire (par croissance de la fonction exp).

Supposons maintenant $A(x) > -\frac{1}{3(1-x)}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))} &\leqslant \frac{1}{3(1-x)}\\ 3x(1-\cos\theta) &\leqslant (1-x)^2+2x(1-\cos\theta) && ((1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))>0)\\ x(1-\cos\theta) &\leqslant (1-x)^2\\ 0<(1-x)^2+2x(1-\cos\theta) &\leqslant 3(1-x)^2\\ \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)^2+2x(1-\cos\theta)} &\geqslant \frac{x(1-\cos\theta)}{3(1-x)^2} \geqslant \frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^2} && (x\geqslant 1/2>0 \text{ et } 1-\cos\theta\geqslant 0)\\ -\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))} &\leqslant -\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}. && (1-x>0)\end{aligned}$$

Par croissance de l'exponentielle, on conclut.

D. Intermède : quelques estimations de sommes

10. La fonction $\varphi_{n,\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
Étude en 0. L'équivalent simple :

$$\varphi_{n,\alpha}(x) \sim \frac{x^n}{x^n} = 1$$

montre que $\varphi_{n,\alpha}$ est intégrable en 0.
Étude en $+\infty$. On a :

$$\varphi_{n,\alpha}(x) \sim x^n e^{-\alpha x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{par croissances comparées,}$$

donc $\varphi_{n,\alpha}$ est intégrable en $+\infty$.
En conclusion, $\varphi_{n,\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
Ensuite, la fonction $\varphi_{n,\alpha}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'_{n,\alpha}(x) &= \frac{(nx^{n-1}e^{-\alpha x}-\alpha x^n e^{-\alpha x})(1-e^{-x})^n - x^n e^{-\alpha x} n(1-e^{-x})^{n-1}e^{-x}}{(1-e^{-x})^{2n}}\\ &= \frac{x^{n-1}e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^{n+1}}\big((n-\alpha x)(1-e^{-x})-nxe^{-x}\big).\end{aligned}$$

La fonction $\varphi'_{n,\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Étude en 0. On a le développement limité suivant :

$$(n-\alpha x)(1-e^{-x}) - nxe^{-x} = (n-\alpha x)(x+O(x^2)) - nx(1+O(x)) = O(x^2).$$

Comme on a aussi :

$$\frac{x^{n-1}e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^{n+1}} \sim \frac{x^{n-1}}{x^{n+1}} = \frac{1}{x^2},$$

on en déduit $\varphi'_{n,\alpha}(x) = O(1)$, ce qui montre l'intégrabilité de $\varphi'_{n,\alpha}$ en 0.

Étude en $+\infty$. Comme précédemment, par croissances comparées, on a $\varphi'_{n,\alpha}(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, ce qui montre l'intégrabilité de $\varphi'_{n,\alpha}$ en $+\infty$.

En conclusion, $\varphi'_{n,\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

11. • Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $1-e^{-kt} > 0$ (puisque $kt > 0$), donc la fraction $\frac{k^n e^{-kt\alpha}}{(1-e^{-kt})^n}$ est bien définie (et positive). On a l'équivalent simple suivant quand k tend vers $+\infty$:

$$\frac{k^n e^{-kt\alpha}}{(1-e^{-kt})^n} \sim k^n e^{-kt\alpha}.$$

Puisque $t\alpha > 0$, on en déduit, par croissances comparées, que :

$$\frac{k^n e^{-kt\alpha}}{(1-e^{-kt})^n} = o\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

ce qui montre, par comparaison à un exemple de Riemann, que la série $\sum \frac{k^n e^{-kt\alpha}}{(1-e^{-kt})^n}$ est absolument convergente donc convergente.

• Par positivité des termes sommés, on a :

$$S_{n,\alpha}(t) \geqslant \frac{e^{-t\alpha}}{(1-e^{-t})^n} > 0.$$

• Soit $k \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties, on a :

$$\underbrace{\int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)dx}_{=a_k} = t\varphi_{n,\alpha}((k+1)t) - \int_{kt}^{(k+1)t} \varphi_{n,\alpha}(x)dx.$$

Par intégrabilité de $\varphi_{n,\alpha}$ et d'après le premier point, la série $\sum a_k$ est convergente et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k &= t\sum_{k=0}^{+\infty}((k+1)t)^n \frac{e^{-(k+1)\alpha t}}{(1-e^{-(k+1)t})^n} - \int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x)dx \\ &= t^{n+1}\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j^n e^{-j\alpha t}}{(1-e^{-j\alpha t})^n} - \int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x)dx \\ &= t^{n+1}S_{n,\alpha}(t) - \int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x)dx,\end{aligned}$$

ce qui conclut.

• D'après ce qui précède, il suffit de montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \underset{t\to 0^+}{=} O(t).$$

Par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t} \underbrace{(x-kt)}_{\leqslant t}|\varphi'_{n,\alpha}(x)|dx \leqslant t\underbrace{\int_0^{+\infty} |\varphi'_{n,\alpha}(x)|dx}_{\text{indépendant de } t}, \quad (\text{intégrabilité de } \varphi'_{n,\alpha})$$

ce qui conclut.

12. Pour tout $x > 0$, on a $|e^{-x}| < 1$ donc : $\underbrace{\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}}_{=f(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{xe^{-(n+1)x}}_{=u_n(x)}$.

Chaque fonction u_n est continue (par morceaux) et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa somme f est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par le théorème d'intégration terme à terme (cas positif), on en déduit :

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n(x)dx \underbrace{=}_{IPP} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Notons que le caractère fini de la somme montre l'intégrabilité de la fonction f, même s'il était possible de le justifier directement.

E. Contrôle des fonctions caractéristiques

13. Notons $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble de réels contenant l'ensemble des valeurs prises par X, avec, éventuellement, $\mathbb{P}(X = x_n) = 0$, ce qui permet de traiter indifféremment les cas où X prend un nombre fini ou infini de valeurs. On suppose, naturellement, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, injective. Comme les variables aléatoires $\cos(\theta X)$ et $\sin(\theta X)$ admettent une espérance, on peut utiliser le théorème de transfert qui nous assure de la convergence absolue des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(\theta x_n)\mathbb{P}(X = x_n)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(\theta x_n)\mathbb{P}(X = x_n)$ et nous donne

$$\mathbb{E}(\cos(\theta X) + i\mathbb{E}(\sin(\theta X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(\theta x_n)\mathbb{P}(X = x_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(\theta x_n)\mathbb{P}(X = x_n)$$

Comme les deux séries sont convergentes, on peut les regrouper par linéarité,

$$|\mathbb{E}(\cos(\theta X)) + i\mathbb{E}(\sin(\theta X))| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} (\cos(\theta x_n) + i\sin(\theta x_n))\mathbb{P}(X = x_n)\right|$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n)$ converge et vaut, 1. On peut donc faire passer le module à l'intérieur de la somme

$$|\Phi_X(\theta)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\cos(\theta x_n) + i\sin(\theta x_n)|\,\mathbb{P}(X = x_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n) = 1.$$

14. Pour cette question, on peut utiliser à nouveau le théorème de transfert, qui nous donne, comme dans la question précédente

$$\begin{aligned}\Phi_{aX+b}(\theta) &= \mathbb{E}(\cos(\theta(aX + b))) + \mathbb{E}(\sin(\theta(aX + b)))\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(\theta(ax_n + b))\mathbb{P}(X = x_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(\theta(ax_n + b))\mathbb{P}(X = x_n)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i(ax_n+b)}\mathbb{P}(X = x_n).\end{aligned}$$

On sait que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ (avec $q = 1-p$), on peut donc prendre $x_n = n$, $\mathbb{P}(X = 0) = 0$ et

$$\mathbb{P}(X = n) = pq^{n-1} \text{ pour } n > 0$$

On reporte dans l'expression précédente, pour obtenir la somme d'une série géométrique de raison $qe^{ia\theta}$ et de premier terme $pe^{i(a+b)\theta}$. Cette série converge, car $\left|qe^{ia\theta}\right| = q \in]0; 1[$, On en déduit

$$\Phi_{aX+b}(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{i(an+b)} p(qe^{ia\theta})^{n-1} = \frac{pe^{i(a+b)\theta}}{1 - qe^{ia\theta}}.$$

15. Pour montrer que X^k est d'espérance finie, on peut, à nouveau utiliser le théorème de transfert. Selon ce théorème, il suffit de montrer que $(n^k\mathbb{P}(X = n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sommable. Ou encore que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} n^k\mathbb{P}(X = n)$ converge. On peut écrire, par le théorème des croissances comparées,

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 n^k pq^{n-1} = 0, \text{ car } q \in [0; 1[$$

On en déduit la majoration $0 \leqslant n^k pq^{n-1} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, sachant que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Le théorème de comparaison, permet alors de conclure à la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^k pq^{n-1}$.

Le théorème de transfert permet alors d'assurer l'existence de l'espérance de X^k.

Pour montrer que Φ_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on applique le théorème de dérivation des séries de fonctions à l'expression

$$\Phi_X(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{in\theta} pq^{n-1}.$$

Posons, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $u_n(\theta) = e^{in\theta}pq^{n-1}$. Alors, à $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Dans la question 13, on a vu la convergence simple de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n^{(k)}(\theta) = i^k n^k e^{in\theta} pq^{n-1} \Rightarrow |u_n^{(k)}(\theta)| \leqslant n^k pq^{n-1},$$

(en fait, on est dans le cas d'égalité). Le membre de droite est le terme général d'une série numérique convergente. Il y a convergence normale.
Les hypothèses du théorème de dérivation des séries de fonctions est vérifié à tout ordre. On peut donc en déduire que Φ_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ \Phi_X^{(k)}(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k i^k e^{in\theta} pq^{n-1}.$$

L'utilisation du théorème de transfert, permet alors d'obtenir, dans le cas $\theta = 0$,

$$\Phi_X^k(0) = i^k \mathbb{E}(X^k).$$

16. On utilise l'expression de la question 14, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_X(\theta) = \frac{pe^{i\theta}}{1 - qe^{i\theta}}.$$

Pour montrer l'existence d'une suite de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on procède, classiquement, par récurrence en montrant l'existence de P_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Initialisation. Pour le rang $k = 0$, on a $\Phi_X = \Phi_X^{(0)} = \frac{pe^{i\theta}}{1-qe^{i\theta}}$. On pose $P_0 = 1$, qui convient.
Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe P_k tel que $P_k(0) = 1$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_X^{(k)}(\theta) = pi^k e^{i\theta} \frac{P_k(qe^{i\theta})}{(1 - qe^{i\theta})^{k+1}}.$$

On peut dériver cette expression, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\Phi_X^{(k+1)}(\theta) &= pi^{k+1} e^{i\theta} P_k(qe^{i\theta}) \frac{1}{(1 - qe^{i\theta})^{k+1}} \\ &+ pi^k e^{i\theta} qie^{i\theta} P_k'(qe^{i\theta}) \frac{1}{(1 - qe^{i\theta})^{k+1}} \\ &+ pi^k e^{i\theta} P_k(qe^{i\theta}) \frac{-(k+1)qie^{i\theta}}{(1 - qe^{i\theta})^{k+2}} \\ &= pi^{k+1} e^{i\theta} \frac{P_k(qe^{i\theta})(1 - qe^{i\theta}) + qe^{i\theta} P_k'(qe^{i\theta})(1 - qe^{i\theta}) - (k+1)qe^{i\theta} P_k(qe^{i\theta})}{(1 - qe^{i\theta})^{k+2}}\end{aligned}$$

Il suffit donc de poser

$$P_{k+1} = (1 - X)P_k + X(1 - X)P_k' - (k+1)XP_k.$$

pour obtenir le résultat. En substituant 0 à X, on obtient $P_k(0) = P_{k+1}(0)$. Ainsi, la condition $P_{k+1}(0) = 1$.
Le principe de récurrence permet alors de montrer l'existence de P_k, pour tout k entier naturel, satisfaisant les propriétés demandées.

17. Selon la question 15, on peut écrire $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k)$. La question 16, nous donne $\Phi_X^{(k)}(0) = pi^k \frac{P_k(q)}{(1-q)^{k+1}} = \frac{P_k(q)}{p^k}$.
On peut alors écrire l'égalité

$$\left|\mathbb{E}(X^k) - \frac{1}{p^k}\right| = \left|\frac{P_k(q) - 1}{p^k}\right| = \left|\frac{P_k(q) - P_k(0)}{p^k}\right|.$$

Cette dernière expression nous fait penser à utiliser le théorème des accroissements finis. C'est possible, puisque P_k est un polynôme, donc une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. On pose

$$C_k = \sup_{t\in[0,1]} |P_k'(t)|$$

Bien entendu, selon la question 16, P_k ne dépend pas de p, il en va donc de même de C_k. Le théorème des accroissements finis nous donne alors

$$\left|\mathbb{E}(X^k) - \frac{1}{p^k}\right| = \left|\frac{P_k(q) - P_k(0)}{p^k}\right| \leqslant \frac{C_k q}{p^k}$$

18. On développe le membre de gauche suivant la formule du binôme de Newton,

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^4) = \mathbb{E}(X^4) - 4\mathbb{E}(X^3)\mathbb{E}(X) + 6\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(X)^2 - 4\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X)^3 + \mathbb{E}(X)^4.$$

On remplace les $\mathbb{E}(X)$ par des $\frac{1}{p}$, pour obtenir

$$\mathbb{E}(X^4) - 4\mathbb{E}(X^3)\frac{1}{p} + 6\mathbb{E}(X^2)\frac{1}{p^2} - 4\frac{1}{p}\frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4}.$$

On fait alors intervenir des $\mathbb{E}(X^k) - \frac{1}{p^k}$, autant que faire se peut. On fait également attention à les retrancher pour compenser.

$$\left(\mathbb{E}(X^4) - \frac{1}{p^4}\right) - 4\left(\mathbb{E}(X^3) - \frac{1}{p^3}\right)\frac{1}{p} + 6\left(\mathbb{E}(X^2) - \frac{1}{p^2}\right)\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} - 4\frac{1}{p^4} + 6\frac{1}{p^4} - 4\frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^4}.$$

Les termes en $\frac{1}{p^4}$ se simplifient. On utilise alors l'inégalité triangulaire,

$$\left|\mathbb{E}(E^4) - \frac{1}{p^4}\right| \leqslant \left|\mathbb{E}(X^4) - \frac{1}{p^4}\right| + \frac{4}{p}\left|\mathbb{E}(X^3) - \frac{1}{p^3}\right| + \frac{6}{p^2}\left|\mathbb{E}(X^2) - \frac{1}{p^2}\right|$$

La question précédente nous donne

$$\left|\mathbb{E}(E^4) - \frac{1}{p^4}\right| \leqslant \frac{C_4 q}{p^4} + \frac{4C_3 q}{p^4} + \frac{6C_2 q}{p^4}$$

On obtient le résultat demandé, avec $K = C_4 + 4C_3 + 6C_2$.

19.

$$\sup(1, Y^4) = \mathbf{1}_{|Y|\leqslant 1} + Y^4\mathbf{1}_{|Y|>1}.$$

Les deux termes de cette somme sont des variables aléatoire admettant une espérance, puisque, d'une part $\mathbf{1}_{|Y|\leqslant 1}$ est bornée, et, d'autre part, on a la majoration

$$0 \leqslant Y^4\mathbf{1}_{|Y|>1} \leqslant Y^4.$$

(théorème de comparaison pour les espérances.) On peut alors passer au variables aléatoires Y^2 et $|Y|^4$, en utilisant les inégalité

$$0 \leqslant Y^2 \leqslant \sup(1, Y^4) \text{ et } 0 \leqslant |Y^3| \leqslant \sup(1, Y^4)$$

Puisque $\sup(1, Y^4)$ possède une espérance, le théorème de comparaison nous dit qu'il en va de même de Y^2 et de $|Y|^3$.
Passons à la première inégalité, afin de ne pas refaire le coup du théorème de transfert, et pour varier les plaisirs, on va utiliser le théorème de Cauchy-Schwarz. Si Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2, alors leur produit Z_1Z_2 admet une espérance, et l'on a

$$\mathbb{E}(Z_1Z_2) \leqslant \mathbb{E}(Z_1^2)^{1/2}(E)(Z_2^2)^{1/2}.$$

Comme Y^4 possède une espérance, les hypothèses du théorème sont vérifiées avec $Z_1 = Y^2$ et $Z_2 = 1$. On obtient ainsi,

$$\mathbb{E}(Y^2) \leqslant \mathbb{E}(Y^4)^{1/2}\mathbb{E}(1)^{1/2} = \mathbb{E}(Y^4)^{1/2}.$$

Pour la seconde inégalité, on aimerait utiliser l'inégalité de Jensen pour les espérances. Elle n'est pas au programme. Pour rentrer dans ce cadre, on va utiliser, à nouveau, le théorème de transfert. On note $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble dénombrable de réels contenant les valeurs prises par Y. Bien entendu, on suppose la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ injective.
$|Y|^3$ possède une espérance, donc, selon le théorème de transfert, la famille $(|y_n|^3\mathbb{P}(X = n))$ est sommable et l'on a

$$\mathbb{E}(Y^3) = \sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|^3\mathbb{P}(Y = y_n).$$

On pose $\mu_N = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(Y_n = y_n)$, comme $\lim_{N\to+\infty} \mu_N = 1$, on peut écrire que $\mu_N \neq 0$ pour N suffisamment grand. La limite de μ_N, nous permet d'écrire

$$\mathbb{E}(Y^3) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\mu_N}\sum_{n=0}^{N} |y_n|^3\mathbb{P}(Y = y_n).$$

Pour appliquer le théorème de Jensen, on a notre somme. Il nous reste à trouver une fonction φ, convexe (ou concave). L'énoncé nous suggère $\varphi : t \mapsto t^{4/3}$, définie sur $\mathbb{R}_+$.
Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée seconde est

$$\varphi''(t) = \frac{4}{3}\frac{1}{3}t^{-2/3} > 0.$$

φ est donc bien continue et convexe sur $\mathbb{R}^+$. Dans ces conditions, l'inégalité de Jensen s'écrit

$$\varphi\left(\sum_{i=0}^{N} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=0}^{N} \varphi(\lambda_i x_i),$$

avec, pour N le même que défini plus haut, $\lambda_n = \frac{1}{\mu_N}\mathbb{P}(Y = y_n)$, et $x_n = |y_n|^3$. Les λ_n sont alors bien de somme 1, les x_n dans $\mathbb{R}_+$. On en arrive alors à

$$\left(\mathbb{E}(|Y|^3)\right)^{4/3} \leqslant \lim N \to +\infty \sum_{i=1}^{N} (|y_n|^3)^{4/3}\mathbb{P}(Y = y_n) = \mathbb{E}(Y^4),$$

où la continuité de φ nous a permis d'inverser $\lim_{N\to+\infty}$ et φ. Pour conclure, il suffit de prendre la puissance $3/4 > 0$ de l'égalité obtenue.

Pour le lecteur intéressé, l'inégalité de Jensen donne directement le résultat. Comme φ est continue, convexe sur $\mathbb{R}_+$, on peut écrire
$$\mathbb{E}(|Y|^3)^{4/3} = \varphi(\mathbb{E}(|Y|^3)) \leqslant \mathbb{E}(\varphi(|Y|^3)) = \mathbb{E}(Y^4).$$

20. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange. La fonction $f : u \to e^{iu}$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc écrire
$$\left| f(u) - f(0) - f'(0)u - \frac{f''(0)}{2}u \right| \leqslant \frac{\sup_{[0,1]} |f'''(u)|}{6} |u|^3.$$
Ici, l'on a $f(0) = 1$, $f'(0) = i$, $f''(0) = -1$ et $f'''(u) = i^2 e^{iu} \Rightarrow |f''(u)| = 1$. On en déduit
$$\forall u \in \mathbb{R}, \ \left| e^{iu} - 1 - iu + \frac{u^2}{2} \right| \leqslant \frac{|u|^3}{6}.$$
On remplace u par $Y\theta$ et l'on prend l'espérance dans l'inégalité
$$\mathbb{E}\left| e^{iY\theta} - 1 - iY\theta + \frac{Y\theta}{2} \right| \leqslant \mathbb{E}\left(\frac{|Y|^3}{6}\right)$$
On utilise alors les relations $|\Re(z)| \leqslant |z|$, et $|\Im(z)| \leqslant |z|$, valable pour tout z complexe. On utilise également le fait que la valeur absolue de l'espérance est inférieure à l'espérance de la valeur absolue. On peut, ainsi écrire, sachant $\mathbb{E}(Y) = 0$ comme Y est centrée.
$$\begin{aligned}
\left| \Phi_Y(\theta) - 1 - \frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right| &= \left| \mathbb{E}(\cos(Y\theta) + i\mathbb{E}(\sin(Y\theta) - 1 - i\mathbb{E}(Y)\theta + \frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right| \\
&\leqslant \left| \mathbb{E}(\cos(Y\theta) - 1 + \frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right| + |\mathbb{E}(\sin(Y\theta) - \mathbb{E}(Y)\theta| \\
&\leqslant \mathbb{E}\left(\left| \cos(Y\theta) - 1 - \frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right| \right) + \mathbb{E}\left(|\sin(Y\theta) - Y\theta|\right) \\
&\leqslant 2\mathbb{E}\left(\left| \cos(Y\theta) + i\sin(Y\theta) - 1 + iY\theta + \frac{\mathbb{E}(Y^2\theta^2)}{2} \right| \right) \\
&\leqslant 2\mathbb{E}\left(\frac{|Y\theta|^3}{6}\right) \leqslant \frac{|\theta|^3}{3}\mathbb{E}(Y^4)^{3/4}
\end{aligned}$$
On a utilisé la deuxième inégalité de la question précédente.

21. On commence par un petit lemme liminaire,
$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \ \left| e^{-y} - 1 + y \right| \leqslant \frac{1}{2}y^2.$$
Il va sans dire que le lecteur perspicace aura reconnu la formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction $f : y \mapsto e^{-y}$. La fonction f est bien $\mathcal{C}^2$ et l'on a $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ et $f''(y) = e^{-y}$, donc $\sup_{\mathbb{R}_+} |f''| = 1$. On peut donc substituer dans
$$\left| f(y) - f(0) - f'(0)y \right| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{\mathbb{R}_+} |f''| y^2$$
On peut alors effectuer les calculs suivants
$$\begin{aligned}
\left| \Phi_Y(\theta) - \exp\left(-\frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2}\right) \right| &\leqslant \left| \Phi_Y(\theta) - 1 + \frac{\mathbb{E}(Y^2)(\theta^2)}{2} \right| + \left| \exp\left(-\frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2}\right) - 1 + \frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right| \\
&= \frac{|\theta|^3}{3}\mathbb{E}(Y^4)^{3/4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2}\right)^2 = \frac{|\theta|^3}{3}\mathbb{E}(Y^4)^{3/4} + \frac{\theta^4}{8}\mathbb{E}(Y^4)
\end{aligned}$$

F. Convergence vers une gaussienne

22. On procède par récurrence sur $n \geqslant 1$.
initialisation
Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer.
Pour $n = 2$, on écrit,
$$\begin{aligned}
|z_1z_2 - u_1u_2| &= |z_1z_2 - z_1u_2 + z_1u_2 - u_1u_2| \\
&= |z_1(z_2 - u_2) + (z_1 - u_1)u_2| \leqslant |z_1|.|z_2 - u_2| + |u_2|.|z_1 - u_1| \\
&\leqslant |z_1 - u_1| + |z_2 - u_2|
\end{aligned}$$
puisque $|z_1| \leqslant 1$ et $|u_2| \leqslant 1$. On utilisera ce cas, $n = 2$, dans la suite du raisonnement.

hérédité
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On suppose que pour tous complexes $(z'_1, \ldots, z'_n)$ et $(u'_1, \ldots, u'_n)$, on a

$$\left|\prod_{k=1}^{n} z'_k - \prod_{k=1}^{n} u'_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z'_k - u'_k|.$$

Soient alors $(z_1, \ldots, z_n, z_{n+1})$ et $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$ des complexes. On applique l'hypothèse de récurrence à,

$$z'_1 = z_1, \ldots, z'_{n-1} = z_{n-1}, z'_n = z_n z_{n+1} \text{ et } u'_1 = u_1, \ldots, u'_{n-1} = u_{n-1}, u'_n = u_n u_{n+1}.$$

On remarque que le membre de gauche nous donne

$$\left|\prod_{k=1}^{n} z'_k - \prod_{k=1}^{n} u'_k\right| = \left|\prod_{k=1}^{n+1} z_k - \prod_{k=1}^{n+1} u_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |z_k - u_k| + |z_n z_{n+1} - u_n u_{n+1}|.$$

On applique alors la propriété au rang 2 pour conclure.
Le théorème de récurrence permet alors de conclure. La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

23. Notons, tout d'abord, que les résultats des questions 19 à 21 s'appliquent ici avec $Y = Y_k$. En effet, Z_k suit une loi géométrique, donc elle possède des moments à tout ordre, car sa fonction génératrice, $G_{Z_k}(t) = \frac{pt}{1-qt}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 1. Il en va donc de même pour Y_k. Cette dernière variable aléatoire est centrée : $\mathbb{E}(Y_k) = k\mathbb{E}(Z_k - \mathbb{E}(Z_k)) = 0$. On commence par utiliser la question 14, avec $X = Z_k$, $p = 1 - e^{-kt}$, $a = k$ et $b = -k\mathbb{E}(z_k) = \frac{-k}{1-e^{-kt}}$, ce qui nous donne

$$\prod_{k=1}^{n} \Phi_{Y_k}(\theta) = \prod_{k=1}^{n} \frac{(1-e^{-kt})e^{i(k-k/(1-e^{-kt})\theta}}{1-e^{-kt+ik\theta}}.$$

Selon la question 3, on a déjà la limite suivante,

$$\lim_{n=1} \prod_{k=1}^{n} \frac{1-e^{-kt}}{1-e^{k(i\theta-t)}} = \frac{P(e^{i\theta-t})}{P(e^{-t})}$$

Il nous reste à étudier, lorsque $n \to +\infty$

$$\prod_{k=1}^{n} \exp\left(ik\left(1 - \frac{1}{1-e^{-kt}}\right)\theta\right) = \exp\left(-i\theta\sum_{k=1}^{n} \frac{ke^{-kt}}{1-e^{-kt}}\right) \to e^{-i\theta S_{1,1}(t)}.$$

La somme dans l'exponentielle est justement la somme partielle de la série servant à définir $S_{1,1}(t)$, au début de la partie D. En reportant dans l'expression du produit, en en utilisant $m_t = S_{1,1}(t)$, il vient

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \Phi_{Y_k}(\theta) = e^{-im_t\theta} \frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})} = h(t,\theta)$$

L'expression de $\sigma_t^2 = S_{2,1}(t)$ est donnée au début de la partie D

$$\sigma_t^2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2e^{-kt}}{(1-e^{-kt})^2}$$

On va alors simplifier l'expression suivante à l'aide de la question 22,

$$\left|\prod_{k=1}^{n} \Phi_{Y_k}(\theta) - \prod_{k=1}^{n} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\frac{k^2e^{-kt}}{(1-e^{-kt})^2}\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|\Phi_{Y_k}(\theta) - \exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\frac{k^2e^{-kt}}{(1-e^{-kt})^2}\right)\right|$$

Pour pouvoir utiliser la question 23, il nous reste à faire le lien avec $\mathbb{E}(Y_k^2)$. La variable aléatoire Z_k suit une géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-kt}$. On a donc les relations

$$\mathbb{E}(Z_k) = \frac{1}{1-e^{-kt}} \text{ et } v(Z_k) = \frac{e^{-kt}}{(1-e^{-kt})^2}.$$

Comme $Y_k = k(Z_k - \mathbb{E}(Z_k))$, on en déduit $v(Y_k) = k^2v(Z_k) = \frac{k^2e^{-kt}}{(1-e^{-kt})^2}$. De plus Y_k est centrée. La formule de Koenig-Huygens, nous donne $\mathbb{E}(Y_k^2) = v(Y_k) + \mathbb{E}(Y_k)^2$. On en tire $\mathbb{E}(Y_k^2) = \frac{k^2e^{-kt}}{(1-e^{-kt})^2}$.
Avec tout cela, on va pouvoir utiliser la question 21 comme le suggère l'énoncé,

$$\begin{aligned}\left|\prod_{k=1}^{n} \Phi_{Y_k}(\theta) - \prod_{k=1}^{n} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\frac{k^2e^{-kt}}{(1-e^{-kt})^2}\right)\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|\Phi_{Y_k}(\theta) - \exp\left(-\frac{\mathbb{E}(Y_k^2)\theta^2}{2}\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|\theta|^3}{3}\mathbb{E}(Y_k^4)^{3/4} + \frac{\theta^4}{8}\mathbb{E}(Y_k^4)\end{aligned}$$

On applique alors la question 18 à la variable aléatoire $X = Z_k$,

$$\mathbb{E}(Y_k^4) = k^4\mathbb{E}((Z_k - \mathbb{E}(Z_k))^4) \leqslant k^4 K \frac{e^{-kt}}{(1-e^{-kt})^4}.$$

On reporte dans l'expression précédente. On en arrive à la majoration (on a fait tendre n vers $+\infty$)

$$\begin{aligned}\left|h(t,\theta) - e^{-\frac{\sigma_t^2\theta^2}{2}}\right| &\leqslant \frac{|\theta|^3K^3}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^3e^{-3kt/4}}{(1-e^{-kt})^3} + K\theta^4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k-4e^{-kt}}{(1-e^{-kt})^4}\\ &= K^{3/4}|\theta|^3 S_{3,3/4}(t) + K\theta^4 S_{4,1}(t).\end{aligned}$$

24. On utilise le développement limité de la question 11 qui permet d'exprimer un équivalent de $S_{n,\alpha}$ sous forme d'intégrale.

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 = S_{2,1}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^2e^{-kt}}{(1-e^{-kt})^2} &\underset{t\to0^+}{=} \frac{1}{t^3}\int_0^{+\infty}\frac{x^2e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}\,dx + O(1/t^2)\\ &\underset{t\to0^+}{=} \frac{\pi^2}{3t^3} + O(1/t^2) \underset{t\to0^+}{=} \frac{\pi^2}{3t^3}(1+o(1)),\end{aligned}$$

selon le résultat admis de la question 12. On a le droit de prendre la puissance 1/2 d'un équivalent, ce qui nous donne bien $\sigma_t \sim \frac{\pi}{\sqrt{3}t^{3/2}}$.
On remarque, en passant, que l'on a de la même façon,

$$m_t \underset{t\to0^+}{=} \frac{1}{t^2}\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx + O(1/t) \underset{t\to0^+}{=} \frac{\pi^2}{6t^2} + O(1/t).$$

On reporte ceci dans l'expression de $\zeta(t,u)$

$$\zeta(t,u) = \exp\left(i\frac{u}{\sigma_t}\left(m_t - \frac{\pi^2}{6t^2}\right)\right) \underset{t\to0^+}{=} \exp\left(iu\frac{\sqrt{3}t^{3/2}}{\pi}O(1/t)\right) \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} 1$$

Pour l'expression de $h(t,u/\sigma_t)$, on utilise la question 23 avec $\theta = \frac{u}{\sigma_t}$, donc $\sigma_t\theta = u$.

$$\left|h(t,u/\sigma_t) - e^{-u^2/2}\right| \leqslant K^{3/4}\left|\frac{u}{\sigma_t}\right|^3 S_{3,3/4}(t) + K\left|\frac{u}{\sigma_t}\right|^4 S_{4,1}(t)$$

On va montrer que les deux termes tendent vers 0 avec t. La question 11 nous donne déjà $S_{3,3/4}(t) \underset{t\to0^+}{=} O(1/t^3)$ ainsi que $S_{4,1}(t) \underset{t\to0^+}{=} O(1/t^5)$, et l'on a vu, dans cette question 24, $\frac{1}{\sigma_t^4} \underset{t\to0^+}{=} O(t^6)$. On peut donc écrire

$$K^{3/4}\left|\frac{u}{\sigma_t}\right|^3 S_{3,3/4}(t) \underset{t\to0^+}{=} O(t^{3/2}) \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} 0$$
$$K\left|\frac{u}{\sigma_t}\right|^4 S_{4,1}(t) \underset{t\to0^+}{=} O(t) \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} 0$$

Muni de ces deux résultats, on peut conclure sur la limite de $j(t,u)$

$$\lim_{t\to0^+}\left|j(u,t) - e^{-u^2/2}\right| = \lim_{t\to0^+}\left|\zeta(t,u)h(t,\frac{u}{\sigma_t}) - e^{-u^2/2}\right| = 0.$$

25. On note $g : \theta \mapsto \frac{1-\cos(\theta)}{\theta^2}$ pour $[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$ et $g(0) = \frac{1}{2}$. C'est une fonction continue, dans la mesure où l'on a le développement limité

$$\frac{1-\cos(\theta)}{\theta^2} \underset{\theta\to0}{=} \frac{1-\left(1-\theta^2/2+o(\theta^2)\right)}{\theta^2} \underset{\theta\to0}{=} \frac{1}{2} + o(1)$$

On a, ainsi, une fonction continue sur l'intervalle compact $[-\pi,\pi]$. Elle y admet donc un minimum atteint en un point $\theta^* \in [-\pi,\pi]$. Il s'agit du théorème des bornes atteintes. On pose $\alpha = g(\theta^*)$. Pour montrer que $\alpha > 0$, on raisonne par l'absurde, en supposant, $\alpha \leqslant 0$, alors, comme $g(0) = 1/2 > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que g doit s'annuler.
Si $\theta \in [-\pi,\pi]$ vérifie $g(\theta) = 0$, alors, on a $1-\cos(\theta) = 0$, donc $\theta = 0$. Ce n'est pas possible, car $g(0) = 1/2$.
On va alors montrer qu'il existe $t_0 > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$, tels que, pour tout $t \in]0,t_0]$ et tout $\theta \in [-\pi,\pi]$,

$$|h(t,\theta)| \leqslant e^{-\beta(\sigma_t\theta)^2}.$$

On ne traitera que la première inégalité. Pour la seconde, on procède de la même façon. On utilise la relation donnée au début de la partie F, avec $x = e^{-t}$, et $t_0 = \ln(2)$

$$h(t,\theta) = e^{-im_t\theta}\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}.$$

On applique alors la première relation de la question 9.

$$|h(t,\theta)| = \left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1-\cos(\theta)}{6(1-e^{-t})^3}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{\alpha\theta^2}{6(1-e^{-t})^3}\right).$$

Pour faire intervenir σ_t, on va faire intervenir $S_{2,1}(t)$, que l'on peut minorer

$$S_{2,1}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2 e^{-kt}}{(1-e^{-kt})^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-kt}}{(1-e^{-t})^2} = \frac{e^{-t}}{(1-e^{-t})^3}.$$

On a ainsi les inégalités, sachant $t \in [0, \ln(2)]$, donc $e^{-t} \geqslant e^{-\ln(2)}$.

$$\left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{\alpha\theta^2}{6(1-e^{-t})^3}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{\alpha}{6}e^{-t}\theta^2 S_{1,1}(t)\right) \leqslant \exp\left(-\frac{\alpha}{12}\theta^2\sigma_t^2\right)$$

On obtient l'inégalité demandé, avec $\beta = \frac{\alpha}{12}$.

26. Conclure que Pour cette question, on utilise le théorème de convergence dominée. On a, selon la question 24, $\pi\sigma_t \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.
On utilise la fonction, g définie sur $]0, t_0] \times \mathbb{R}$, par

$$g(t,u) = j(t,u)\mathbf{1}_{[-\pi\sigma_t, \pi\sigma_t]}$$

À t fixé, la fonction $u \mapsto g(t,u)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, car nulle en dehors d'un intervalle borné. On a la convergence simple, selon la question 24,

$$\forall u \in \mathbb{R},\ g(t,u) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} e^{-u^2/2}.$$

Il reste à établir l'hypothèse de domination. Cela vient de la question précédente. On utilise la définition de la fonction j. Pour tout $t > 0$ et u réel,

$$|g(t,u)| \leqslant \left|h(t, \frac{u}{\sigma_t})\right| \leqslant \sup\left(e^{-\beta u^2}\ , e^{-\gamma(|u|)^{2/3}}\right) = o\left(\frac{1}{1+u^2}\right)$$

Il s'agit bien de l'hypothèse de domination, puisque la fonction $u \mapsto \frac{1}{u^2+1}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.
Le théorème de convergence dominée, nous donne donc

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t,u)\,du = \lim_{t\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du = \sqrt{2\pi},$$

selon le résultat admis en début d'énoncé.

G. La conclusion

27. On utilise la relation de la question 7, $p_n = \dfrac{e^{nt}P(e^{-t})}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}\frac{P(e^{-t+i\theta})}{P(e^{-t})}\,d\theta$.
On commence par s'intéresser à la fonction sous le signe intégrale. On a, selon la définition de $h(t,\theta)$ et de $j(t,u)$ donnée au début de la partie F. On pose $\theta = u/\sigma_t$

$$e^{in\theta}\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})} = e^{i(n+m_t)\theta}h(t,\theta) = e^{i(n+m_t)\theta}e^{(-i\theta(m_t-\frac{\pi^2}{6t^2})}j(t,\theta\sigma_t) = e^{i(n+\pi^2/(6t^2))\theta}j(t,\theta\sigma_t)$$

Le choix de t proposé par l'énoncé, nous donne $n = \pi^2/(6t^2)$. On peut donc simplifier l'exponentielle. L'intégrale à étudier s'écrit $\int_{-\pi}^{\pi} j(t,\theta\sigma_t)\,d\theta$.
On effectue le changement de variable, C^1 sur $[-\pi,\pi]$, $\theta = u/\sigma_t$. En utilisant la question 26, on en arrive à

$$\int_{-\pi}^{\pi} j(t,\theta\sigma_t)\,d\theta = \sigma_t^{-1}\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t,u)\,du \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{3}t^{3/2}}{\pi}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{6t^3}{\pi}}.$$

Pour le facteur $P(e^{-t})$, on utilise alors la relation de l'énoncé. On obtient un équivalent de p_n lorsque $n \to +\infty$, ou, ce qui revient au même $t \to 0^+$. On exprime d'abord p_n en fonction de t, sachant que $n = \frac{\pi^2}{6t^2}$

$$p_n \sim \frac{e^{\pi^2/(6t)}}{2\pi}\sqrt{\frac{t}{2\pi}}e^{\pi^2/(6t)}\sqrt{\frac{6t^3}{\pi}} = e^{\pi^2/(3t)}\frac{1}{2\pi^2}\sqrt{3}t^2.$$

On remplace alors t par son expression en fonction de n. Cela nous donne

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp\left(\frac{\pi^2}{\pi\sqrt{3/(2n)}}\right)\frac{1}{2\pi^2}\sqrt{3}\frac{\pi^2}{3\times 2n} = \frac{1}{4\sqrt{3}n}\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right).$$