

## Composition n° 5 bis

Le vendredi 14 février 2025

L'objectif de ce problème est l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier naturel  $n$ , c'est-à-dire du nombre de décompositions de  $n$  en somme d'entiers naturels non nuls (sans tenir compte de l'ordre des termes). Une définition rigoureuse de ce nombre, noté  $p_n$ , est donnée en début de la partie **B**. Dans la partie **A**, on introduit une fonction  $P$  de la variable complexe; dans la fin de la partie **B** on démontre qu'il s'agit de la somme, sur le disque unité ouvert de  $\mathbb{C}$ , de la série entière  $\sum_{n \geq 0} p_n z^n$ . L'étude de  $P$  au voisinage de 1 permet alors, dans les parties suivantes, de progresser vers l'obtention d'un équivalent simple de la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (formule asymptotique de Hardy et Ramanujan).

Tout au long du problème, le disque unité ouvert de  $\mathbb{C}$  sera noté  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

Dans tout l'énoncé, on utilisera la dénomination « variable aléatoire réelle » pour signifier « variable aléatoire discrète réelle ».

On admettra aussi les deux identités classiques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}.$$

## A. Fonctions $L$ et $P$

1. Soit  $z \in D$  Montrer que la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$ . Préciser la valeur de sa somme lorsque  $z \in ]-1, 1[$ .

On notera

$$L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}.$$

2. Soit  $z \in D$ . Montrer que la fonction  $t \in [0, 1] \mapsto L(tz)$  est dérivable et donner une expression simple de sa dérivée.

En déduire que  $t \in [0, 1] \mapsto (1 - tz)e^{L(tz)}$  est constante sur  $[0, 1]$  et conclure que

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1 - z}.$$

3. Montrer que  $|L(z)| \leq -\ln(1 - |z|)$  pour tout  $z$  dans  $D$ . En déduire la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} L(z^n)$  pour tout  $z$  dans  $D$ .

Dans la suite, on notera, pour  $z$  dans  $D$ ,

$$P(z) := \exp \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n) \right].$$

On remarque, en vertu de la question précédente et des propriétés de l'exponentielle, que

$$\forall z \in D, P(z) \neq 0 \quad \text{et} \quad P(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - z^n}.$$

## B. Développement de $P$ en série entière

Pour  $(n, N) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ , on note  $P_{n,N}$  l'ensemble des listes  $(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{N}^N$  telles que  $\sum_{k=1}^N k a_k = n$ . Si cet ensemble est fini, on note  $p_{n,N}$  son cardinal.

4. Soit  $n \in N$ . Montrer que  $P_{n,N}$  est fini pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , que la suite  $(p_{n,N})_{N \geq 1}$  est croissante et qu'elle est constante à partir du rang  $\max(n, 1)$ .

Dans toute la suite, on notera  $p_n$  la valeur finale de  $(p_{n,N})_{N \geq 1}$

5. Montrer par récurrence que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall z \in D, \prod_{k=1}^N \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n.$$

6. Soit  $z \in D$ . On convient que  $p_{n,0} = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En examinant la sommabilité de la famille  $((p_{n,N+1} - p_{n,N})z^n)_{(n,N) \in \mathbb{N}^2}$ , démontrer que

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n.$$

En déduire le rayon de convergence de la série entière  $\sum_n p_n x^n$ .

7. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que pour tout réel  $t > 0$ ,

$$p_n = \frac{e^{nt}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P(e^{-t+i\theta}) d\theta,$$

si bien que

$$p_n = \frac{e^{nt} P(e^{-t})}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \frac{P(e^{-t+i\theta})}{P(e^{-t})} d\theta. \quad (1)$$

Dans le reste du problème, l'objectif est d'obtenir un équivalent du nombre  $p_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Cet équivalent sera obtenu via un choix approprié de  $t$  en fonction de  $n$  dans la formule (1).

## C. Contrôle de $P$

8. Soit  $x \in [0, 1[$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . En utilisant la fonction  $L$ , montrer que

$$\left| \frac{1-x}{1-xe^{i\theta}} \right| \leq \exp(-(1-\cos\theta)x)$$

En déduire que pour tout  $x \in [0, 1[$  et tout réel  $\theta$ ,

$$\left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| \leq \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \Re\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\right).$$

9. Soit  $x \in [\frac{1}{2}, 1[$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . Montrer que

$$\frac{1}{1-x} - \Re\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) \geq \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2 + 2x(1-\cos\theta))}.$$

En déduire que

$$\left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| \leq \exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}\right) \quad \text{ou que} \quad \left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right).$$

## D. Intermède : quelques estimations de sommes

On fixe dans cette partie un réel  $\alpha > 0$  et un entier  $n \geq 1$ . Sous réserve d'existence, on pose

$$S_{n,\alpha}(t) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n e^{-kt\alpha}}{(1-e^{-kt})^n}.$$

On introduit aussi la fonction

$$\phi_{n,\alpha} : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n},$$

qui est évidemment de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

10. Montrer que  $\varphi_{n,\alpha}$  et  $\varphi'_{n,\alpha}$  sont intégrables sur  $]0, +\infty[$ .  
 11. Montrer, pour tout réel  $t > 0$ , l'existence de  $S_{n,\alpha}(t)$ , sa positivité stricte, et l'identité

$$\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x) dx = t^{n+1} S_{n,\alpha}(t) - \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt) \varphi'_{n,\alpha}(x) dx.$$

En déduire que

$$S_{n,\alpha}(t) = \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n} dx + O\left(\frac{1}{t^n}\right) \quad \text{quand } t \rightarrow 0^+.$$

12. Démontrer, sans utiliser ce qui précède, que

$$\int_0^{\infty} \frac{x e^{-x}}{1-e^{-x}} dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

Dans le reste du problème, nous admettrons le résultat suivant (il peut être démontré par une méthode similaire) :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

## E. Contrôle des fonctions caractéristiques

Étant donné une variable aléatoire réelle  $X$  sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ , ainsi qu'un réel  $\theta$ , les variables aléatoires réelles  $\cos(\theta X)$  et  $\sin(\theta X)$  sont d'espérance finie puisque bornées : on introduit alors le nombre complexe

$$\Phi_X(\theta) := E(\cos(\theta X)) + iE(\sin(\theta X)).$$

13. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. Montrer que  $|\Phi_X(\theta)| \leq 1$  pour tout réel  $\theta$ .  
 Dans les questions 14▷ à 18▷, on se donne une variable aléatoire réelle  $X$  suivant une loi géométrique, de paramètre  $p \in ]0, 1[$  arbitraire. On pose  $q = 1 - p$ .  
 14. Montrer que pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et tout réel  $\theta$ ,

$$\Phi_{aX+b}(\theta) = \frac{p e^{i(a+b)\theta}}{1 - q e^{i a \theta}}.$$

15. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la variable aléatoire  $X^k$  est d'espérance finie. Montrer que  $\Phi_X$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .  
 16. Montrer qu'il existe une suite  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de polynômes à coefficients dans  $\mathbb{C}$ , indépendante de  $p$ , telle que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \Phi_X^{(k)}(\theta) = p i^k e^{i\theta} \frac{P_k(q e^{i\theta})}{(1 - q e^{i\theta})^{k+1}} \quad \text{et} \quad P_k(0) = 1.$$

17. En déduire qu'il existe une suite  $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de réels strictement positifs, indépendante de  $p$ , telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left| E(X^k) - \frac{1}{p^k} \right| \leq \frac{C_k q}{p^k}.$$

18. En déduire qu'il existe un réel  $K > 0$  indépendant de  $p$  tel que

$$E((X - E(X))^4) \leq \frac{Kq}{p^4}.$$

Dans les questions 19▷ à 21▷, on se donne une variable aléatoire réelle centrée  $Y$  telle que  $Y^4$  soit d'espérance finie.

19. Montrer successivement que  $Y^2$  et  $|Y|^3$  sont d'espérance finie, et que

$$E(Y^2) \leq (E(Y^4))^{1/2} \quad \text{puis} \quad E(|Y|^3) \leq (E(Y^4))^{3/4}.$$

20. Montrer, pour tout réel  $u$ , l'inégalité  $\left| e^{iu} - 1 - iu + \frac{u^2}{2} \right| \leq \frac{|u|^3}{6}$ .

En déduire pour tout réel  $\theta$ ,  $\left| \Phi_Y(\theta) - 1 + \frac{E(Y^2)\theta^2}{2} \right| \leq \frac{|\theta|^3}{3} (E(Y^4))^{3/4}$ .

21. Conclure que pour tout réel  $\theta$ ,

$$\left| \Phi_Y(\theta) - \exp\left(-\frac{E(Y^2)\theta^2}{2}\right) \right| \leq \frac{|\theta|^3}{3} (E(Y^4))^{3/4} + \frac{\theta^4}{8} E(Y^4).$$

## F. Convergence vers une gaussienne

Étant donné un réel  $t > 0$ , on pose, suivant les notation de la partie **D**,

$$m_t := S_{1,1}(t) \quad \text{et} \quad \sigma_t := \sqrt{S_{2,1}(t)}.$$

Étant donné des réels  $t > 0$  et  $\theta$ , on pose

$$h(t, \theta) = e^{-im_t\theta} \frac{P(e^{-t}e^{-i\theta})}{P(e^{-t})}.$$

Étant donné des réels  $t > 0$  et  $u$ , on pose

$$\zeta(t, u) = \exp\left(i\frac{u}{\sigma_t}\left(m_t - \frac{\pi^2}{6t^2}\right)\right) \quad \text{et} \quad j(t, u) = \zeta(t, u)h\left(t, \frac{u}{\sigma_t}\right).$$

22. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  ainsi que des complexes  $z_1, \dots, z_n, u_1, \dots, u_n$  tous de module inférieur ou égal à 1. Montrer que

$$\left| \prod_{k=1}^n z_k - \prod_{k=1}^n u_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k - u_k|.$$

23. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $t \in \mathbb{R}_+^*$ . On considère, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , une variable aléatoire  $Z_k$  suivant la loi  $\mathcal{G}(1 - e^{-kt})$ , et on pose  $Y_k = k(Z_k - E(Z_k))$ . Démontrer que

$$h(t, \theta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \Phi_{Y_k}(\theta)$$

. En déduire, en particulier à l'aide de la question 21▷, l'inégalité

$$\left| h(t, \theta) - e^{-\frac{\sigma_t^2 \theta^2}{2}} \right| \leq K^{3/4} |\theta|^3 S_{3,3/4}(t) + K\theta^4 S_{4,1}(t). \quad (2)$$

On rappelle que la constante  $K$  a été introduite à la question 18▷, les quantités  $S_{n,\alpha}(t)$  dans la partie D.

24. Montrer que  $\sigma_t \sim \frac{\pi}{\sqrt{3t^{3/2}}}$  quand  $t$  tend vers  $0^+$ . En déduire, pour tout réel  $u$ , que

$$j(t, u) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} e^{-u^2/2}.$$

25. Montrer qu'il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi], 1 - \cos \theta \geq \alpha \theta^2.$$

À l'aide de la question 9▷, en déduire qu'il existe trois réels  $t_0 > 0, \beta > 0$  et  $\gamma > 0$  tels que, pour tout  $t \in ]0, t_0]$  et pour tout  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ,

$$|h(t, \theta)| \leq e^{-\beta(\sigma_t \theta)^2} \quad \text{ou} \quad |h(t, \theta)| \leq e^{-\gamma(\sigma_t |\theta|)^{2/3}}.$$

26. Conclure que

$$\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t, u) du \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} \sqrt{2\pi}.$$

## G. La conclusion

Dans cette dernière partie, on admet que  $P(e^{-t}) \sim \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \exp\left(\frac{\pi^2}{6t}\right)$  quand  $t$  tend vers  $0^+$ .

27. En appliquant la formule (1) à  $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$  démontrer que

$$p_n \sim \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3n}} \quad \text{quand} \quad n \rightarrow +\infty,$$

formule découverte par Hardy et Ramanujan en 1918.