Composition n° 5

Le vendredi 14 février 2025

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

La ***présentation*** *de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.*

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ x^2y'' + (x^2 - x)y' + 2y = 0$.
Existe-t-il des solutions f non nulles de (E) développables en série entière au voisinage de 0 ?

Exercice 2

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On s'intéresse à une file d'attente à un guichet. À l'instant 0, la file contient un client. On suppose qu'à chaque instant $k \in \mathbb{N}$ il peut arriver au plus un nouveau client dans la file.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si un nouveau client arrive à l'instant k et 0 sinon.

On suppose que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

On repère chaque client par un indice qui donne son ordre d'arrivée dans la file : par définition, le client initialement présent a pour indice $n = 0$, le premier nouvellement arrivé a pour indice $n = 1$, etc. On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est la fonction notée G_X définie par :

$$G_X(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j)t^j.$$

Partie I - Temps d'arrivée du n-ième client

1. On note T_1 la variable aléatoire égale au temps écoulé entre le temps 0 et le temps où arrive le client d'indice 1.
   Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T_1 = k) = (1-p)^{k-1}\,p$.
2. On note A l'événement « aucun nouveau client n'arrive dans la file ».
   Exprimer A en fonction des événements $\{T_1 = k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\mathbb{P}(A)$. Interpréter.
3. Déterminer le rayon de convergence R de la fonction génératrice de T_1, puis calculer sa somme.
4. En déduire l'espérance et la variance de T_1.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n la variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'arrivée du client d'indice $n-1$ et le client d'indice n. On admet que les variables aléatoires T_n sont indépendantes de même loi.
   On note $D_n = T_1 + \cdots + T_n$ la variable aléatoire qui donne le temps d'arrivée du client d'indice n.
   Calculer l'espérance, la variance et la fonction génératrice G_{D_n} de D_n.
6. Rappeler le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de $x = 0$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
   En déduire le développement en série entière de G_{D_n} en 0 et montrer que pour tout $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\mathbb{P}(D_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n, \\ \binom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie II - Étude du comportement de la file

II.1 - Une suite récurrente

Soient $a > 0$ et $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(a(x-1)) \end{array} \right.$. On s'intéresse au comportement de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$z_1 \in]0,1[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = f(z_n).$$

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in]0,1[$ et $z_{n+1} - z_n$ est du même signe que $z_2 - z_1$.
8. En déduire que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in [0,1]$ vérifiant $f(\ell) = \ell$.
9. Soit la fonction $\psi : \left\{ \begin{array}{l}]0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) - a(x-1) \end{array} \right.$.

   Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $0 \leqslant \psi(x) \Leftrightarrow f(x) \leqslant x$ et $\psi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.
10. On suppose dans cette question que $a \leqslant 1$.
    Étudier le signe de ψ et montrer qu'elle ne s'annule qu'en $x = 1$.
    En déduire que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
11. On suppose dans cette question que $a > 1$.
    Étudier le signe de ψ et montrer que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet exactement deux solutions α et 1 avec $\alpha \in]0,1[$ qu'on ne cherchera pas à expliciter.
    En distinguant les cas $z_1 \in]0,\alpha]$ et $z_1 \in]\alpha, 1[$, montrer que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

II.2 - Groupes de clients

On suppose que les clients de la file d'attente sont servis suivant leur ordre d'arrivée par un unique serveur et que la durée de service de chaque client est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: pour tout $k \in \mathbb{N}$, le service a une durée k avec la probabilité $\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.
On rappelle qu'initialement, la file contient un unique client : le client d'indice 0.
On note S la variable aléatoire égale à la durée de service de ce client : comme à chaque instant il arrive au plus un nouveau client, il peut arriver entre 0 et S nouveaux clients pendant le temps de passage au guichet du client d'indice 0. Les variables S et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont supposées indépendantes.
On appelle « clients du premier groupe » les clients qui sont arrivés pendant que le client d'indice 0 était servi.
Par récurrence, pour tout $k \geqslant 2$, on définit les clients du k-ième groupe comme étant les clients qui sont arrivés pendant que ceux du $(k-1)$-ième groupe étaient servis. Pour tout $k \geqslant 1$, on note V_k la variable aléatoire égale au nombre de clients du k-ième groupe. Par construction, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si le n-ième groupe est vide, alors l'événement $\{V_k = 0\}$ est réalisé pour tout $k \geqslant n$.

12. Quelle est la situation concrète décrite par l'événement $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{V_n = 0\}$?
13. Quelle est la loi du nombre N_n de clients qui sont arrivés dans la file d'attente dans l'intervalle de temps $\{1, \ldots, n\}$?
14. Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}_{[S_n=n]}(V_1 = k)$.
    En déduire que V_1 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
15. On note $z_n = \mathbb{P}(V_n = 0)$. Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\mathbb{P}(Z) = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.
16. Justifier que pour tout $(j,n) \in \mathbb{N}^2$, $P_{[V_1=j]}(V_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(V_n = 0)^j$. On distinguera le cas $j = 0$.
17. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_{n+1} = \exp(\lambda p(z_n - 1))$.
18. Déterminer, suivant les valeurs de λp, la limite de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Interpréter.

Exercice 3

Dans cet exercice $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels.
Pour $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial k parmi n. On note $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ et $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 0$ si $k > n$.
$[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre a et b. Ainsi $[\![a,b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} | a \leqslant n \leqslant b\}$

Partie I - Utilisation de séries entières

I.A - Une première formule

1. Donner sans démonstration le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\sum_{n\geqslant 0} x^n$.

2. En déduire le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\sum_{n\geqslant 0} nx^n$.

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \binom{n}{k} x^n$ admet 1 pour rayon de convergence et que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \tag{1}$$

I.B - Une seconde formule

On s'intéresse dans cette sous-partie à la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} x^n$ dont on note R le rayon de convergence.

4. Déterminer R et montrer que, pour tout $x \in]-R,R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

5. Montrer que, pour tout $x \in]-R,R[\setminus\{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}. \tag{2}$$

6. En déduire que, pour tout $x \in]-R,R[\setminus\{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^n = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1\right).$$

7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1}. \tag{3}$$

II - Probabilités

Dans cette troisième partie, toutes les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
La lettre p désigne un nombre réel de l'intervalle $]0,1[$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$.

II.A - Un conditionnement

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suivant la loi géométrique de paramètre p :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est la loi de Poisson de paramètre n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y = k \mid X = n) = \mathrm{e}^{-n} \frac{n^k}{k!}.$$

8. Déterminer la loi conjointe de X et Y.

9. Calculer $\mathbb{P}(Y=0)$ et montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y=k) = \frac{p}{(1-p)k!}\, f_k\left(\frac{1-p}{\mathrm{e}}\right)$$

10. Vérifier que l'on a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=k) = 1$.
11. Montrer que Y admet une espérance finie et calculer cette espérance.
12. Montrer que Y admet une variance et calculer cette variance.

II.B - Pile ou face infini

On considère la répétition infinie du lancer d'une pièce dont la probabilité de « faire pile » est p. Pour modéliser cette expérience, on admet que l'on peut définir une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[X_n = 1]$ désigne l'événement « le n-ième lancer donne pile » et $[X_n = 0]$ désigne l'événement « le n-ième lancer donne face ».
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit A_n et B_n par
— A_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a autant de piles que de faces » ;
— B_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a pour la première fois autant de piles que de faces ».
Par exemple si les six premiers lancers donnent dans l'ordre (face, face, pile, pile, face, pile), A_1 n'est pas réalisé mais A_2 et A_3 le sont, B_2 est réalisé mais B_1 et B_3 ne le sont pas.
Enfin on définit C, « au bout d'un certain nombre (non nul) de lancers, il y a autant de piles que de faces ». On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n et B_n sont des événements, et que C est un événement.

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer A_n à l'aide de la variable aléatoire $X_1 + \ldots + X_n$ et en déduire $\mathbb{P}(A_n)$.
14. Montrer que les événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont incompatibles.
15. Montrer que C est un événement et que $\mathbb{P}(C) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.
16. On pose $A_0 = \Omega$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A_{n-k})$.
17. À l'aide notamment de la formule (I.3), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\big(p(1-p)\big)^n.$$

18. On suppose que $p \neq \dfrac{1}{2}$, montrer que $\mathbb{P}(C) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}$ (on pourra utiliser la formule 2).
19. On suppose que $p = \dfrac{1}{2}$, montrer que $\mathbb{P}(C) = 1$.