Composition n° 4, une correction

Exercice 1

Partie I - Déplacement aléatoire sur un tétraèdre

1. Les événements $(X_n = 1)$, $(X_n = 2)$, $(X_n = 3)$ et $(X_n = 4)$ forment un système complet d'événements. Ainsi :
$$a_n + b_n + c_n + d_n = 1.$$

2. On a $J^2 = 4J$ et $J^3 = 4J^2 = 4^2 J$.
Supposons que pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$ on ait $J^k = 4^{k-1}J$. Alors $J^{k+1} = 4^{k-1}J^2 = 4^k J$. Ainsi, puisque $J = 4^0 J$, on a démontré par récurrence que pour tout $k \in N^*$ on a $J^k = 4^{k-1}J$.

3. La matrice de transition de ce graphe est la matrice carrée d'ordre 4 où le terme figurant en ligne i et colonne j est égal au poids de l'arête allant du sommet i vers le sommet j si cette arête existe ou à 0 sinon. Cela justifie que la matrice de transition est :
$$T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(J - I).$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les événements $(X_n = 1)$, $(X_n = 2)$, $(X_n = 3)$ et $(X_n = 4)$ forment un système complet d'événements. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(X_{n+1} = 1) = \sum_{j=1}^{4} P(X_{n+1} = 1, X_n = j) \\ &= \underbrace{P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1)}_{=0} P(X_n = 1) + \underbrace{P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 1)}_{=1/3} P(X_n = 2) \\ &\quad + \underbrace{P_{[X_n=3]}(X_{n+1} = 1)}_{=1/3} P(X_n = 3) + \underbrace{P_{[X_n=4]}(X_{n+1} = 1)}_{=1/3} P(X_n = 4) \\ &= \frac{1}{3}(b_n + c_n + d_n) = \frac{1}{3}(1 - a_n) \end{aligned}$$
On trouve de la même manière :
$$\begin{cases} b_{n+1} &= \frac{1}{3}(a_n + c_n + d_n) \\ c_{n+1} &= \frac{1}{3}(a_n + b_n + d_n) \\ d_{n+1} &= \frac{1}{3}(a_n + b_n + c_n) \end{cases}.$$
Cela signifie exactement que $L_{n+1} = L_n T$.

5. Si pour un certain $n \in \mathbb{N}$ on a $L_n = L_0 T^n$ alors : $L_{n+1} = L_n T = L_0 T^n T = L_0 T^{n+1}$.
Comme $L_0 = L_0 T^0$ on peut conclure par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $L_n = L_0 T^n$.

6. La matrice T est symétrique réelle : elle est diagonalisable sur $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

7. **Réduction de la matrice $\boldsymbol{T}$.**
   a) La matrice $T + \frac{1}{3}I$ est $\frac{1}{2}J$ donc est de rang 1. Il en résulte (théorème du rang) que $\dim \ker(T + \frac{1}{3}I) = 3$ et ainsi $-\frac{1}{3}$ est valeur propre de T de multiplicité géométrique 3.
   b) On $TU = U$.

c) • D'après la question 7a, $-\dfrac{1}{3}$ est valeur propre de T de multiplicité géométrique 3 et comme les colonnes de la matrice $T+\dfrac{1}{3}I$ sont toutes égales on en déduit que :

$$\ker(T+\frac{1}{3}I) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right).$$

• D'après la question précédente, 1 est valeur propre de T et l'espace propre associé est la droite vect(U).

• On a ainsi $T = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

8. Une récurrence (à faire) montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $T^n = PD^nP^{-1}$.

9. a) La matrice T est diagonalisable et $\text{Spec}(T) = \left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}$: selon le cours, $P = (X-1)(X+\frac{1}{3})$ est un polynôme annulateur de T.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On écrit la division euclidienne de X^n par P : il existe un unique couple (Q_n, R_n) dans $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\begin{cases} X^n = PQ_n + R_n \quad (*) \\ \deg R_n < \deg P \end{cases}$$

On peut écrire $R_n = \alpha_n X + \beta_n$ et en évaluant $(*)$ en 1 et $-1/3$ on obtient le système :

$$(S) \begin{cases} \alpha_n + \beta_n = 1 \\ -\frac{1}{3}\alpha_n + \beta_n = (-\frac{1}{3})^n \end{cases},$$

ce qui permet de trouver $\alpha_n = \dfrac{3}{4}(1-(-\frac{1}{3})^n)$ et $\beta_n = 1 - \dfrac{3}{4}(1-(-\frac{1}{3})^n)$. Il vient alors :

$$T^n = \underbrace{P(T)}_{=0}Q_n(T) + R_n(T) = R_n(T) = \alpha_n T + \beta_n I.$$

10. a) D'après la question 5, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $L_n = L_0 T^n$ avec $L_0 = (a_0, b_0, c_0, d_0)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec la question 9b, on a :

$$(a_n, b_n, c_n, d_n) = \alpha_n(a_0, b_0, c_0, d_0)T + \beta_n(a_0, b_0, c_0, d_0).$$

Ainsi il vient :

$$\begin{cases} a_n &= \frac{\alpha_n}{3}(b_0+c_0+d_0) + \beta_n a_0 \\ b_n &= \frac{\alpha_n}{3}(a_0+c_0+d_0) + \beta_n b_0 \\ c_n &= \frac{\alpha_n}{3}(a_0+b_0+d_0) + \beta_n c_0 \\ d_n &= \frac{\alpha_n}{3}(a_0+b_0+c_0) + \beta_n d_0 \end{cases}.$$

Or $\alpha_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{3}{4}$ et $\beta_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4}$. Ainsi, comme $a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = 1$, il vient :

$$a_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}, \quad b_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}, \quad c_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}, \quad d_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$$

b) Les résultats obtenus à la question 10a signifient, puisque la vitesse de convergence des suites (a_n), (b_n), (c_n) et $d_n)$ est la même, que quelque soit la position initiale du mobile au bout d'un certain temps n le mobile aura presque la même probabilité de se trouver sur un des sommets du tétraèdre.

Partie II - Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs.

1. $f : x \to e^{-x}$ est de classe C^2 $\mathbb{R}$ et pour tout x réel on a $f''(x) = e^{-x} \geqslant 0$. Ainsi f est convexe. La courbe représentative de f est donc au-dessus de toutes ses tangentes en particulier de celle au point d'abscisse 0. Ainsi pour tout x réel on a $f(x) \geqslant f'(0)(x-0) + f(0)$.

   Conclusion. $\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ on a } 1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}}$.

2. a) La série de terme général $P(A_i)$ est à termes positifs et divergente et il en va de même de la série $\sum_{i \geqslant k} P(A_i)$ donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty}$$

   b) • Soit $n \geqslant k$ entier. On a, d'après les formules de Morgan :

$$P(C_n) = 1 - P(\overline{C_n}) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{i=k}^{n} A_i}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=k}^{n} \overline{A_i}\right)$$

   Comme $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements indépendants, $(\overline{A_i})_{i \in \mathbb{N}^*}$ est encore une suite d'événements indépendants et ainsi

$$\boxed{P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i})} \qquad (\heartsuit)$$

   • Soit $n \geqslant k$ entier. Pour tout i dans $\{k, \ldots, n\}$, d'après la question 1, on a d'après la question 1 :

$$0 \leqslant P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) \leqslant \exp\left(-P(A_i)\right)$$

   Par produit : $\displaystyle\prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i}) \leqslant \prod_{i=k}^{n} \exp(-P(A_i)) = \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right)$

   Ainsi, avec ($\heartsuit$), on obtient $\boxed{P(C_n) \geqslant 1 - \exp\big(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\big)}$.

   • On a vu que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty$ donc, par composition des limites, on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right) = 0$$

   Mais on a pour tout $n \geqslant k$ entier :

$$1 \geqslant P(C_n) \geqslant 1 - \exp\big(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\big)$$

   Par sandwich, il vient : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(C_n) = 1}$.

   c) • Pour tout $n \geqslant k$ on a $C_n = \displaystyle\bigcup_{i=k}^{n} A_i \subset \bigcup_{i=k}^{n+1} A_i = C_{n+1}$ donc $\boxed{C_n \subset C_{n+1}}$.

   La suite $(C_n)_{n \geqslant k}$ est croissante pour l'inclusion : le théorème de convergence monotone affirme alors que l'on a

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right) = \lim_{n \to +\infty} P(C_n) = 1}$$

   d) • On procède par double inclusion.

— Soit $i \geqslant k$ un entier. On a $A_i \subset \bigcup_{j=k}^{i} A_j = C_i \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$. Ceci étant vrai pour tout $i \geqslant k$ on a ainsi :

$$\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$$

— Soit $\omega \in \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$. Il existe alors $m \geqslant k$ entier tel que $\omega \in C_m$.

Or $C_m = \bigcup_{i=k}^{m} A_i$ donc il existe un élément i_0 de $\{k, \dots, m\}$ tel que $\omega \in A_{i_0}$.

Par conséquent $\omega \in \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$ et ainsi $\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i \supset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$.

On a donc $\boxed{\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n}$.

- On a alors $P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n\right) = 1$.

3. Appelons P_n l'événement : « *obtenir PILE au n-ième lancer* ». L'indépendance des lancers donne l'indépendance des événements de la suite $(P_{2n} \cap P_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ donc de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puisque $A_n = P_{2n} \cap P_{2n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$ entier.
De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $P(A_n) = P(P_{2n} \cap P_{2n+1}) = P(P_{2n})\, P(P_{2n+1}) = p^2$ donc la série de terme général $P(A_n)$ diverge grossièrement.
D'après la question précédente on a alors pour tout k dans $\mathbb{N}^*$:
$$P\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i\right) = 1$$
Ainsi la probabilité d'obtenir deux PILE consécutifs à partir du k-*ième* lancer vaut 1 pour tout k de $\mathbb{N}^*$.
Conclusion. $\boxed{\text{La probabilité d'avoir deux Piles consécutifs après un lancer fixé est 1}}$.

Exercice 2

Partie I - Un calcul d'intégrale

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto te^{-kt}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
Par changement de variable affine $u = kt$, les intégrales impropres $\int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-kt}\, \mathrm{d}t$ et $\frac{1}{k^2}\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}t$ ont même nature. Mais :
$$\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}t = \Gamma(2) = 1.$$
Conclusion. Comme il s'agit d'une fonction positive, la fonction $t \mapsto t\mathrm{e}^{-kt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et :
$$\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-kt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}.$$

2. • On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-t}} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-(n+1)t}\, \mathrm{d}t.$
   - Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définie pour $t \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}$ par : $f_n(t) = te^{-(n+1)t}$.
     — chaque f_n est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ car $f_n(t) \underset{+\infty}{=} o(1/t^2)$.
     — la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers f qui est continue sur $]0, +\infty[$.

— Chaque f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la première question.
— La série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^2}$ converge donc (d'après la première question) la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique. La fonction f est intégrable sur $]0,+\infty[$ et :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Partie II - La fonction zêta

3. Par Riemann, on a immédiatement $D_\zeta=]1,+\infty[$.

4. Supposons que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge uniformément sur $]1,+\infty[$. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n(x)\underset{x\to 1}{\longrightarrow}\ell_n=\dfrac{1}{n}$.
Le théorème de la double limite assure alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ell_n$ converge, ce qui est profondément stupide.

Conclusion. La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge uniformément sur $]1,+\infty[$.

5. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ la fonction u_n est continue sur $]1,+\infty[$ et on a, dès que $x\geqslant a>1$:

$$|u_n(x)|\leqslant\underbrace{\frac{1}{n^a}}_{\text{indépendant de }x}.$$

Il en résulte que : $\|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[}\leqslant\dfrac{1}{n^a}$. Comme $\zeta(a)$ est bien défini, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a,+\infty[$ et ainsi la fonction ζ est continue sur $[a,+\infty[$.

Conclusion. Ceci étant valable pour tout $a>1$, la fonction ζ est continue sur $D_\zeta=]1,+\infty[$.

6. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ la fonction u_n est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et on a : $u_n'(x)=(\ln n)u_n(x)$.
Enfin, pour $a>1$ et $x\geqslant a$ on a :

$$|u_n'(x)|\leqslant\underbrace{(\ln n)\frac{1}{n^a}}_{\text{indépendant de }x}.$$

Il en résulte que : $\|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[}\leqslant\dfrac{\ln n}{n^a}$.
Mais pour $\gamma\in]1,a[$, on a $n\gamma\dfrac{\ln n}{n^a}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Ainsi la série de terme général $\dfrac{\ln n}{n^a}$ est convergente, donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a,+\infty[$.
Il en résulte que la fonction ζ est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ avec dérivation terme à terme.

Conclusion. Ceci étant valable pour tout $a>1$, la fonction ζ est de classe C^1 sur $D_\zeta=]1,+\infty[$ et on a :

$$\zeta'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^x}.$$

7. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $u_n(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\lambda_n=\begin{cases}1 & \text{si } n=1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Comme la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $[2,+\infty[$, le théorème de la double limite s'applique :

$$\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n=1.$$

8. a) La fonction $t\mapsto \dfrac{1}{t^x}=\mathrm{e}^{-x\ln t}$ est décroissante sur $[n-1,n+1]$ donc, pour tout $t\in[n-1,n]$ et $s\in[n,n+1]$ on a :

$$\frac{1}{s^x}\underbrace{\leqslant}_{(1)}\frac{1}{n^x}\underbrace{\leqslant}_{(2)}\frac{1}{t^x}.$$

On intègre l'inégalité (1) entre n et $n+1$ (les bornes sont dans le bon sens) pour obtenir $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}s}{s^x}\leqslant\frac{1}{n^x}$ et on intègre l'inégalité (2) pour obtenir $\displaystyle\frac{1}{n^x}\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}$.

Conclusion. $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}\leqslant\frac{1}{n^x}\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}$.

b) Soit $x\in D_\zeta$. D'après la question précédente, puisque les objets (intégrales impropres et série) qui interviennent convergent, on a :

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty}\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}}_{=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}}\leqslant\zeta(x)-1\leqslant\underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}}_{=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}}.$$

Il vient ainsi de suite : $\displaystyle 1+\frac{1}{(x-1)2^{x-1}}\leqslant\zeta(x)\leqslant1+\frac{1}{x-1}$.

c) On a $\displaystyle\frac{1}{(x-1)2^{x-1}}\underset{x\to1^+}{\sim}\frac{1}{(x-1)}\underset{x\to1^+}{\longrightarrow}+\infty$ et ainsi $\zeta(x)\underset{x\to1^+}{\longrightarrow}+\infty$.

9. L'allure du graphe de la fonction ζ est pour le lecteur.

Partie III - Étude d'une fonction définie par une somme

10. Soit $x\geqslant0$ réel. Montrons que la série numérique $\sum_{n\geqslant1}f_n(x)$ converge.

— Si $x=0$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(x)=0$ donc la série numérique $\sum_{n\geqslant1}f_n(x)$ converge.

— Si $x>0$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $\displaystyle f_n(x)=\frac{-x}{(n+x)n}\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{x}{n^2}$.

Comme la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{x}{n}^2$ converge, il en va de même de la série numérique $\sum_{n\geqslant1}f_n(x)$.

Conclusion. La série de fonction $\sum_{n\geqslant1}f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

11. • Pour tout $n\in N^*$ et $x\in[0,+\infty[$ on a : $\displaystyle|f_n(x)|=\frac{x}{(n+x)n}\leqslant\frac{x}{n^2}\leqslant\frac{a}{n^2}$ dès que $x\in[0,a]$ où $a\geqslant0$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\|f_n\|_{\infty,[0,a]}\leqslant\frac{a}{n^2}$ qui est le terme général d'une série numérique convergente.

Il en résulte que la série de fonction $\sum_{n\geqslant1}f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0,a]$. Comme chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, la fonction f est continue sur $[0,a]$. Ceci étant vrai pour tout $a\geqslant0$, la fonction f est continue sur $[0,+\infty[$.

• Si $x\leqslant y$ dans $[0,+\infty[$, on a de suite, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(x)\geqslant f_n(y)$, donc $f(x)\geqslant f(y)$: la fonction f est décroissante sur $[0,+\infty[$.

12. On va utiliser le théorème de dérivation version C^k des séries de fonctions. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
    - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_n est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$ et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$ on a (récurrence immédiate sur i) :
    $$f_n^{(i)}(x) = \frac{(-1)^i i!}{(n+x)^{i+1}}.$$
    - Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$. On a $\left|f_n^{(i)}(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{(n+x)^{i+1}}$ qui est le terme général d'une série convergente.

      Ainsi la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n^{(i)}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$, valable aussi pour $i = 0$ d'après la question 10.
    - Soient $a < b$ dans $[0, +\infty[$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
    $$\left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{(n)^{k+1}}.$$
      Comme la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{(n)^{k+1}}$ converge ($k \geqslant 1$), la série de fonction $\sum\limits_{n \geqslant 1} f^{(k)}$ converge normalement donc uniformément sur $[0, +\infty[$.

    Ainsi f est de classe C^k sur $[0, +\infty[$ et on a pour tout $x \geqslant 0$:
    $$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k k!}{(n+x)^{k+1}}.$$
    Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f est de classe C^∞.

13. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $h : t \mapsto \dfrac{t^x - 1}{1-t}$ est continue sur $]0, 1[$.

    Puis $\dfrac{t^x - 1}{1-t} \underset{t \to 0}{t} {}^{x} - 1$. Comme $t \mapsto t^x$ est intégrable en 0 si et seulement si $-x \leqslant 1$ i.e. $x > -1$, la fonction h est aussi intégrable en 0.

    Enfin, en posant $u = 1 - t$, on a :
    $$\frac{t^x - 1}{1-t} = \frac{(1-u)^x - 1}{u} \underset{u \to 0}{=} \frac{-ux + \mathrm{o}(u)}{u} \underset{u \to 0}{=} -x + \mathrm{o}(1) \underset{u \to 0}{\longrightarrow} -x$$
    donc h est prolongeable par continuité en 1.

    Comme h est de signe constant sur $]0, 1[$ l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{1-t}\, \mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $x > -1$.

14. Soit $x > -1$. Pour tout $t \in]0, 1[$ on a $\dfrac{1}{1-t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n$ (série géométrique). Ainsi :
    $$\int_0^1 \frac{t^x - 1}{1-t}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} h_n(t)\right) \mathrm{d}t$$
    où pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, 1[$ on a $h_n(t) = (t^x - 1)t^n$.

    On va alors utiliser le théorème d'intégration terme à terme.
    - La série de fonction $\sum\limits_{n \geqslant 0} h_n$ converge simplement sur $]0, 1[$ vers la fonction $h : t \mapsto \dfrac{t^x - 1}{1-t}$ qui est continue sur $]0, 1[$.
    - Chaque h_n est continue sur $]0, 1[$ et intégrable sur $]0, 1[$ puisque :
        - prolongeable par continuité en 1 ;
        - $h_n(t) \underset{t \to 0}{\sim} t^{\alpha_x}$ où $\alpha_x = \min(n, n+1)$ et $t \mapsto t^{\alpha_x}$ est intégrable en 0 car $\alpha_x > -1$.
    - Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme h_n est de signe constant sur $]0, 1[$, on a :
    $$\int_0^1 |h_n(t)|\, \mathrm{d}t = \left|\int_0^1 h_n(t)\, \mathrm{d}t\right| = \left|\frac{1}{n+x+1} - \frac{1}{n+1}\right| \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{|x|}{n^2} \boxed{\geqslant 0},$$
      qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 0} \displaystyle\int_0^1 |h_n(t)|\, \mathrm{d}t$ est convergente.

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique. La fonction h est intégrable sur $]0,1[$ (ce que l'on savait) et on a :

$$\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 h_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x+1} - \frac{1}{n+1} \right) = f(x).$$

c'est-à-dire : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{1-t}\,\mathrm{d}t.$

Exercice 3 - L'équivalent de Stirling

1. L'application $f_x : t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$; les seuls problèmes d'intégrabilité sont en 0 et en $+\infty$.
   - Au voisinage de 0, $f_x(t) \sim t^{x-1}$ donc, d'après les intégrales de Riemann f_x est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $1-x<1$, soit $x>0$.
   - Au voisinage de $+\infty$, $f_x(t) = o(1/t^2)$ par croissances comparées et, pour des raisons analogues, f_x est donc intégrable sur $[1,+\infty[$.
   - Finalement f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x>0$.

   Conclusion. L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$ converge si, et seulement si, $x>0$.

2. Soient $x>0$. et $(u : t \longmapsto t^x)$ et $(v : t \longmapsto -e^{-t})$.
   Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et uv possède des limites finies (et nulles) en 0 et en $+\infty$. Donc par théorème d'intégration par parties, $\int_{]0,+\infty[} u\,v'$ et $\int_{]0,+\infty[} u'\,v$ sont de même nature et en cas de convergence

$$\int_{]0,+\infty[} u\,v' = \Big[uv\Big]_0^{+\infty} - \int_{]0,+\infty[} u'\,v.$$

   Or dans $\int_{]0,+\infty[} u\,v'$ on reconnait $\Gamma(x+1)$ qui est donc une intégrale convergente, et on a alors :

$$\Gamma(x+1) = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{t\to+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t}\,dt = x\Gamma(x).$$

$$\boxed{\text{Ainsi} \quad \forall\, x>0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$$

   Un calcul direct donne :

$$\Gamma(1) = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

   La formule précédente donne alors par récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$.
   On a $u_0 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2n+1}{2}\,u_n = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)} u_n$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2k+2)(2k+1)}{4(k+1)} \right) u_0 = \frac{(2n)!}{4^n\, n!}\, u_0$$

   ce qui est également vrai pour $n=0$.
   Or, le changement de variable $t=u^2$ donne : $u_0 = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t}\,dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$. On en déduit : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n\,n!}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!}\sqrt{\pi}$.

4. Remarquons que puisque la fonction ln est continue sur $[1/2,+\infty[$, les ρ_k sont bien définis pour tout k dans $\mathbb{N}^*$. Soit $n \geqslant 2$. La relation de Chasles et les propriétés du logarithme fournissent :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k = \ln\left(\prod_{k=1}^{n-1} k \right) - \int_{1/2}^{n-1/2} \ln t\,dt = \ln(n-1)! - \int_{1/2}^{n-1/2} \ln t\,dt.$$

   La convention citée par l'énoncé dit que ce résultat reste valable pour $n=1$; donc par la question 2 :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\Gamma(n) = \int_{1/2}^{n-1/2} \ln t\,dt + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k.}$$

5. Fixons k dans $\mathbb{N}^*$. Le changement de variable $u = t - k$ fournit :
$$\int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln t \, dt = \int_{-1/2}^{1/2} \ln(u+k)\, du = \int_{-1/2}^{0} \ln(u+k)\, du + \int_0^{1/2} \ln(u+k)\, du.$$
Puis en posant $w = -u$, on a $\int_{-1/2}^{0} \ln(u+k)\, du = \int_0^{1/2} \ln(k-w)\, dw$. Finalement :
$$\begin{aligned} \rho_k &= \ln k - \int_0^{1/2} \ln(t+k)\, dt - \int_0^{1/2} \ln(k-t)\, dt = \int_0^{1/2} \left(2\ln k - \ln(t+k) - \ln(k-t)\right)\, dt \\ &= \int_0^{1/2} \ln\left(\frac{k^2}{(k+t)(k-t)}\right) dt = \int_0^{1/2} -\ln\left(\frac{k^2-t^2}{k^2}\right) dt = \int_0^{1/2} -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) dt \end{aligned}$$
6. Par croissance de la fonction $(x \mapsto -\ln(1-x))$, on obtient :
$$0 \leqslant \rho_k \leqslant \int_0^{1/2} -\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) dt = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \quad \sim \frac{1}{8k^2}.$$
Les théorèmes de comparaison sur les séries permettent de conclure que $\boxed{\text{la série } \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \rho_k \text{ converge.}}$
7. La fonction ln admet pour primitive $(t \longmapsto t\ln t - t)$. Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned} \int_{1/2}^{n-1/2} \ln t\, dt = [t\ln t - t]_{1/2}^{n-1/2} &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(n - \frac{1}{2}\right) - n + \frac{\ln 2}{2} + 1 \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln n + \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) - n + \frac{\ln 2}{2} + 1. \end{aligned}$$
Or $\left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n}{2n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) = -\frac{1}{2}$. Donc :
$$\int_{1/2}^{n-1/2} \ln t\, dt = \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} + \circ(1).$$
D'après la question 6, il existe un réel ℓ tel que $\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k = \ell + \circ(1)$ donc, d'après la question 4 : $\exists\, c \in \mathbb{R}$ / $\ln\Gamma(n) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln n - n + c + \circ(1)$.
On en déduit que $\Gamma(n) = \exp\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\ln n - n + c + \circ(1)\right) = n^{n-\frac{1}{2}}\, e^{-n}\, e^c\, e^{\circ(1)}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\circ(1)} = 1$, on obtient bien $\Gamma(n) \underset{+\infty}{\sim} e^c\, n^{n-\frac{1}{2}}\, e^{-n}$.

8. En utilisant le changement de variable $u = \dfrac{t}{n}$, on obtient : $\Gamma_n(x) = n^x \displaystyle\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\, du$.

9. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ l'assertion $\mathcal{H}_n$ suivante : $\boxed{\forall\, x > 0, \quad \Gamma_n(x) = \dfrac{n^x\, n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.}$
- Initialisation :
$$\forall\, x > 0, \quad \Gamma_1(x) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)\, du = \left[\frac{u^x}{x} - \frac{u^{x+1}}{x+1}\right]_{x\to 0}^1 = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1^x\, 1!}{x(x+1)}.$$
Cela prouve que $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- Hérédité : supposons $\mathcal{H}_n$ vraie à un rang fixé n et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
Prenons $x > 0$. On a $\Gamma_{n+1}(x) = (n+1)^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{n+1}\, du$.
On procède à une intégration par parties à l'aide de
$$\forall x \in]0,1], \quad \alpha(u) = (1-u)^{n+1}, \quad \alpha'(u) = -(n+1)(1-u)^n, \quad \beta'(u) = u^{x-1}, \quad \beta(u) = \frac{u^x}{x}.$$
Comme $x > 0$, $\lim_{u\to 0} \alpha(u)\beta(u) = 0$ et $\alpha(1)\beta(1) = 0$, donc
$$\begin{aligned} \Gamma_{n+1}(x) = (n+1)^x \int_0^1 (n+1)(1-u)^n \frac{u^x}{x}\, du &= \frac{(n+1)^{x+1}}{x}\ \frac{\Gamma_n(x+1)}{n^{x+1}} \\ &\underset{\mathcal{H}_n}{=} \frac{(n+1)^{x+1}}{x}\ \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+1+n)} \\ &= \frac{(n+1)^x\, (n+1)!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)}. \end{aligned}$$
Ainsi $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- On a bien montré le résultat par récurrence.

10. Désignons par $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } t \in]0,n[\\ 0 & \text{si } t \geqslant n. \end{cases}$$

Pour $x>0$ fixé, on a : $\forall\, n \geqslant 1, \quad \Gamma_n(x) = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt.$
Vérifions les hypothèses du théorème de convergence dominée :
— Les fonctions f_n sont continues (par morceaux) sur l'intervalle d'intégration $\mathbb{R}_+^*$.
— Convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:
On fixe $t>0$. Alors $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^* \;/\; \forall\, n \geqslant n_0, \quad 0<t<n.$
Ainsi $f_n(t) = \exp\left(n\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right)\right)\; t^{x-1} = \exp\left(n\left(-\dfrac{t}{n}+\circ\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right)\; t^{x-1} = \exp\left(-t+\circ(1)\right)\; t^{x-1}$
et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t}\; t^{x-1}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc simplement vers la fonction $f : t \longmapsto e^{-t}\; t^{x-1}$, continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
— Domination : Par concavité de ln, on a $\forall\, u>-1, \quad \ln(1+u)\leqslant u,$ et par croissance de l'exponentielle :

$$\forall\, t \in]0,n[, \quad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant t^{x-1}\; e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \leqslant t^{x-1}e^{-t}$$

et l'inégalité reste vraie pour $t \geqslant n$. Donc

$$\forall\, t \in]0,+\infty[, \quad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant t^{x-1}e^{-t} = f(t)$$

et f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ puisque $\Gamma(x)$ existe.
Le théorème de convergence dominée s'applique et donne

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \Gamma_n(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\; t^{x-1}\; dt = \Gamma(x).}$$

La question 10 fournit :

$$\boxed{\forall\, x>0, \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x\; n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.}$$

11. Fixons $x>0$. Une récurrence utilisant le résultat de la question 2 montre que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\dots(x+1)x\Gamma(x)$$

Donc

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\; n^x} = \frac{x(x+1)\dots(x+n)\Gamma(x)}{(x+n)\;(n-1)!\; n^x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x(x+1)\dots(x+n)\Gamma(x)}{n!\; n^x}$$

On déduit alors de la question **??** que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\; n^x} = 1 \textit{i.e.} \dfrac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\; n^x} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$. Avec $x=\dfrac{1}{2}$, on obtient $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+n\right) \sim \Gamma(n)\;\sqrt{n}$. Puis la question 3 fournit $\frac{(2n)!}{2^{2n}\; n!}\;\sqrt{\pi} \sim \Gamma(n)\;\sqrt{n}$.
Mais d'après la question 2, $(2n)! = \Gamma(2n+1)$ et $n! = n\Gamma(n)$. Donc $\Gamma(2n+1)\,\sqrt{\pi} \sim n\,\Gamma^2(n)\,\sqrt{n}\,2^{2n}$.
On utilise ensuite la question 7 sur $\Gamma(2n+1)$ et $\Gamma^2(n)$ et on arrive à

$$e^c \sim \frac{(2n+1)^{2n}\,\sqrt{2}\,e^{-1}\,\sqrt{\pi}}{(2n)^{2n}} \sim \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n} e^{-1}\,\sqrt{2\pi}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)^{2n} = e$ donc $e^c = \sqrt{2\pi}.$