

Composition n° 3, une correction

Exercice

Partie I - Préliminaires

1. Soit $x > 0$.

$t \mapsto f(x, t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions usuelles.

Pour tout $t > 0$, $|\sin(t)| \leq |t|$, donc $|f(x, t)| = \left| \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \right| \leq e^{-xt}$.

Or $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $x > 0$), donc, par comparaison, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. • Posons pour $t > 0$ réel : $u'(t) = \sin(t)$, $u(t) = 1 - \cos(t)$, $v(t) = \frac{1}{t}$, $v'(t) = -\frac{1}{t^2}$.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\begin{aligned} u(t)v(t) &= \frac{1 - \cos(t)}{t} = \frac{1 - (1 - t^2/2 + o(t^2))}{t} = \frac{t^2/2 + o(t^2)}{t} = \frac{t}{2} + o(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \\ &= \underbrace{\frac{1 - \cos(t)}{t}}_{\text{borné}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Une intégration par partie donne, $I = \int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt = - \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ sont de même nature, donc l'intégrale impropre I converge si et seulement si l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ converge.

• $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \frac{1 - (1 - t^2/2 + o(t^2))}{t^2} = \frac{t^2/2 + o(t^2)}{t^2} = \frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1/2$, donc $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur $]0, 1]$.

$$\frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \frac{O(1)}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

$t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, en particulier, $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ converge, donc, d'après le premier point de cette question, l'intégrale impropre I converge.

3. Soit $x \geq 0$.

$t \mapsto u(x, t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= -\frac{x \cos(t) - \sin(t)}{1 + x^2} e^{-xt} - \frac{x \sin(t) + \cos(t)}{1 + x^2} \times (-x) e^{-xt} \\ &= \frac{-x \cos(t) + \sin(t) + x^2 \sin(t) + x \cos(t)}{1 + x^2} e^{-xt} \\ &= \frac{(1 + x^2) \sin(t)}{1 + x^2} e^{-xt} = \sin(t) e^{-xt}, \end{aligned}$$

donc $t \mapsto u(x, t)$ est bien une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t) e^{-xt}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie II - Calcul de F sur $]0, +\infty[$

4. • Soit $x > 0$.

Pour tout $t > 0$, $|f(x, t)| = \left| \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \right| \leq e^{-xt}$.

D'où, par l'inégalité triangulaire généralisée et par positivité de l'intégrale convergente (avec " $0 \leq +\infty$ "), on a :

$$|F(x)| = \left| \int_0^{+\infty} f(x, t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(x, t)| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

- Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0.$$

5. Soit $a > 0$.

- Pour tout $x \in [a, +\infty[$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après la question 1 avec $x \geq a > 0$).
- Pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $x \geq a$, pour tout $t > 0$,

$$|f(x, t)| = \left| \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \right| \leq e^{-xt} \leq e^{-at} = \varphi(t),$$

où φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $a > 0$).

Avec les points précédents, le théorème de continuité des intégrales à paramètres, s'applique :

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$$

est continue sur $[a, +\infty[$.

Ceci étant valable quelque soit le choix de $a > 0$, F est continue sur $]0, +\infty[$.

6. • Soit $a > 0$.

- Pour tout $x \in [a, +\infty[$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après la question 1 avec $x \geq a > 0$).
- Pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ (constante fois une exponentielle) et, pour tout $x \geq a$,

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\sin(t)e^{-xt}$$

est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $x \geq a$, pour tout $t > 0$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = |-\sin(t)e^{-xt}| \leq e^{-xt} \leq e^{-at} = \varphi(t),$$

où φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $a > 0$).

Avec les points précédents, le théorème de dérivation des intégrales à paramètres s'applique. L'ap-

plication $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et, pour tout $x \geq a$,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = - \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt} dt.$$

Comme F est dérivable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\bigcup_{a>0} [a, +\infty[=]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = - \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt} dt = - [u(x, t)]_0^{+\infty} = - \frac{1}{1+x^2}$$

- Ainsi il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, $F(x) = -\arctan(x) + K$.

Enfin, on a $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc $K = \frac{\pi}{2}$.

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

Partie III - Conclusion

7. — Pour tout $t \in]0, 1]$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[0, 1]$.
 — Pour tout $x \in [0, 1]$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue (par morceaux) sur $]0, 1]$.
 — Pour tout $t \in]0, 1]$, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|f(x, t)| = \left| \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \right| \leq e^{-xt} \leq 1 = \varphi(t),$$

où φ est intégrable sur $]0, 1]$ (constante sur un intervalle borné).

D'où, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, $F_1 : x \mapsto \int_0^1 f(x, t) dt$ est continue sur $[0, 1]$.

8. Soit $x \in [0, 1]$.
 • Pour tout $t \geq 1$,

$$\frac{u(x, t)}{t^2} = \frac{1}{t^2} \times \left(-\frac{x \sin(t) + \cos(t)}{1 + x^2} e^{-xt} \right) = \frac{1}{t^2} \times O_{t \rightarrow +\infty}(1) = O_{t \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $t \mapsto \frac{u(x, t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc, en particulier, $\int_1^{+\infty} \frac{u(x, t)}{t^2} dt$ converge.

• Posons $w'(t) = \sin(t)e^{-xt}$, $w(t) = u(x, t)$, $v(t) = \frac{1}{t}$, $v'(t) = -\frac{1}{t^2}$.

w et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$.

$$w(t)v(t) = \frac{u(x, t)}{t} = O_{t \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{t}\right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\int_1^{+\infty} w(t)v'(t) dt = - \int_1^{+\infty} \frac{u(x, t)}{t^2} dt \text{ converge d'après le premier point.}$$

D'où, par intégration par parties, $\int_1^{+\infty} f(x, t) dt = \int_1^{+\infty} w'(t)v(t) dt$ converge (mais on le savait déjà) et

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \int_1^{+\infty} u'(t)v(t) dt = \left[\frac{u(x, t)}{t} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x, t)}{t^2} dt \\ &= \frac{x \sin(1) + \cos(1)}{1 + x^2} e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x, t)}{t^2} dt. \end{aligned}$$

9. • De plus, $x \mapsto \frac{x \sin(1) + \cos(1)}{1 + x^2} e^{-x}$ est continue sur $[0, 1]$ (par opérations sur les fonctions usuelles)
 • Puis :
 — Pour tout $x \in [0, 1]$, $t \mapsto \frac{u(x, t)}{t^2}$ est continue (par morceaux) sur $[1, +\infty[$.
 — Pour tout $t \geq 1$, $x \mapsto \frac{u(x, t)}{t^2}$ est continue sur $[0, 1]$.
 — Pour tout $x \in [0, 1]$, pour tout $t \geq 1$,

$$\left| \frac{u(x, t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2} \frac{x |\sin(t)| + |\cos(t)|}{1 + x^2} e^{-xt} \leq \frac{1}{t^2} \frac{1 + 1}{1} \times 1 = \frac{2}{t^2} = \varphi(t)$$

où φ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann et $2 > 1$).

D'où, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{u(x, t)}{t^2} dt$ est continue sur $[0, 1]$.

, **Conclusion.** La fonction F_2 est continue sur $[0, 1]$ comme somme de fonctions continues.

10. • D'où, pour tout $x \in [0, 1]$, $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ existe (on le savait déjà, cf 1 et 2) et

$$F(x) = \int_0^1 f(x, t) dt + \int_1^{+\infty} f(x, t) dt = F_1(x) + F_2(x),$$

donc $F = F_1 + F_2$, donc F est continue sur $[0, 1]$ comme somme de fonctions continues.

- On a donc, par continuité de F en 0,

$$I = F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Problème

Partie I - Quelques exemples

- a) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.
 - Si A est diagonalisable, par unicité, la décomposition de Dunford de A est $(A, 0_n)$.
 - Si A est nilpotente, par unicité, la décomposition de Dunford de A est $(0_n, A)$.
- b) Une matrice trigonalisable admet un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$, donc elle admet une décomposition de Dunford.
- c) Le couple $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ n'est pas la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, car elles ne commutent pas.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\chi_A(X) = X^2 + 1$, qui n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc, en supposant que A admette une décomposition de Dunford (D, N) dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on aurait $\chi_D = \chi_A$, ce qui est absurde.
3. On a

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -8 \\ -3 & X+1 & -6 \\ 2 & 0 & X+5 \end{vmatrix} \\ &= (X+1) \begin{vmatrix} X-3 & -8 \\ 2 & X+5 \end{vmatrix} \\ &= (X+1)^3 \end{aligned}$$

Ainsi A admet une décomposition de Dunford. On sait que $\chi_A = \chi_D$, donc D admet -1 pour unique valeur propre et est diagonalisable, donc $D = -I_3$. De là $N = A + I$, qui est bien nilpotente d'indice 2 ($N^2 = 0_3$).

- a) Le polynôme $X(X-1)$ est bien annulateur de la matrice $A^2 \dots$
- b) La matrice A^2 admet un polynôme annulateur scindé à racines simples donc elle est diagonalisable.
Posons $N = A - A^2$. On a alors $N^2 = A^2(A - I_n)^2 = 0$ donc N est nilpotente. Puis les matrices A^2 et N sont des polynômes en A , donc elles commutent.
Par unicité, la décomposition de Dunford de la matrice A est $(A^2, A - A^2)$.

Partie II - Un exemple par deux méthodes

- a) • Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X-3 & 1 & -1 \\ -2 & X & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 1-X & 0 \\ -2 & X & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{C_2 \leftarrow C_2 + C_1}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ -2 & X-2 & -1 \\ -1 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)^2 \end{aligned}$$

• Comme 1 est une valeur propre simple de A , donc $\dim \ker(A - I) = 1$. Il en résulte que A est diagonalisable si et seulement si $\dim(\ker(A - 2I)) = 2$.

Or on a $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 donc $\dim(\ker(A - 2I)) = 1$ ce qui montre que A n'est pas diagonalisable.

b) • Si $x \in \ker(u - \text{Id}) \oplus \ker(u - 2\text{Id})^2$ alors on a $u(x) = x$ et $(u - 2\text{Id})^2(x) = 0$ i.e. $u^2(x) - 4u(x) + 4x = 0$ ce qui conduit à $x - 4x + 4x = 0$ donc $x = 0$ et ainsi la somme $\ker(u - \text{Id}) + \ker(u - 2\text{Id})^2$ est directe.

• On a $\dim \ker(u - \text{Id}) = 1$. D'après Cayley-Hamilton, on a $\chi_u(u) = 0$ donc

$$(u - 2\text{Id})^2 \circ (u - \text{Id}) = 0$$

et ainsi $\text{Im}(u - \text{Id}) \subset \ker(u - 2\text{Id})^2$ donc $\text{rg}(u - \text{Id}) = 2 \leq \dim \ker(u - 2\text{Id})^2$ ce qui amène : $\dim \ker(u - \text{Id}) + \dim \ker(u - 2\text{Id})^2 \geq 3$.

Ainsi $\dim \ker(u - \text{Id}) + \dim \ker(u - 2\text{Id})^2 = 3$.

Conclusion. On a la somme directe : $\mathbb{R}^3 = \ker(u - \text{Id}) \oplus \ker(u - 2\text{Id})^2$.

7. a) • On a $A - I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Comme les deux dernières colonnes sont opposées, et comme $\ker(u - \text{Id})$ est de dimension 1, on a $\ker(u - \text{Id}) = \text{vect}((0, 1, 1))$.
On pose $e_1 = (0, 1, 1)$.

• On a $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ de rang 2 et ses deux premières colonnes sont opposées donc $\ker(u - 2\text{Id}) = \text{vect}((1, 1, 0))$. On pose $e_2 = (1, 1, 0)$.

• On a $(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dont le noyau est de dimension 2 (question précédente ou rang 1). Si C_1, C_2, C_3 désignent les colonnes de $(A - 2I_3)^2$ on a $C_1 = -C_2$ et $C_3 = 0$ donc les vecteurs e_2 et $e_3 = (0, 0, 1)$, qui ne sont pas proportionnels forment une base de $\ker(u - 2\text{Id})^2$.
Ainsi, comme $\mathbb{R}^3 = \ker(u - \text{Id}) \oplus \ker(u - 2\text{Id})^2$, (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie les conditions imposées.

b) On a $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = 2e_2$ et $u(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_2 + 2e_3$. Ce qui donne $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

8. • Posons $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On vérifie que : $B = D_1 + N_1$, $D_1.N_1 = N_1.D_1$ et $N_1^2 = 0_3$. Donc (D_1, N_1) est la décomposition de Dunford de la matrice B .

• Puis A et B sont semblables, $A = P.B.P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

La décomposition de Dunford de la matrice A est donc (D, N) avec $D = P.D_1.P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

et

$$N = PN_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Par identification on trouve : $\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{1}{X-1} + \frac{3-X}{(X-2)^2}$

On multiplie par $(X-1)(X-2)^2$ pour obtenir :

$$1 = (X-2)^2 - (3-X)(X-1)$$

et on prend $U = X-3$ et $V = 1$.

10. a) La relation $(X-1)U(X) + (X-2)^2V(X) = 1$ donne

$$U(u) \circ (u - \text{id}) + V(u) \circ (u - 2\text{id})^2 = \text{id}$$

Ainsi $p(x) + q(x) = x$ pour tout x de $\mathbb{R}^3$.

b) D'après la question 6b on a $\mathbb{R}^3 = \ker(u - \text{id}) \oplus \ker(u - 2\text{id})^2$. Soit $x \in \mathbb{R}^3$, il existe deux vecteurs uniques : $x_1 \in \ker(u - \text{id})$ et $x_2 \in \ker(u - 2\text{id})^2$ tels que $x = x_1 + x_2$. On a $q(x_1) = U(u)((u - \text{id})(x_1)) = 0$ donc $p(x_1) = x_1$ et $p(x_2) = 0$, de même on a $q(x_2) = x_2$ et $q(x_1) = 0$. Ainsi p est la projection sur $\ker(u - \text{Id})$ parallèlement à $\ker(u - 2\text{Id})^2$ et q est la projection sur $\ker(u - 2\text{Id})^2$ parallèlement à $\ker(u - \text{Id})$.

11. a) On a $d(e_1) = p(e_1) + 2q(e_1) = e_1$, $d(e_2) = 2e_2$ et $d(e_3) = 2e_3$, donc la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) D'après la question ci-dessus, d est diagonalisable. De plus d est un polynôme en u car p et q le sont.

Posons $n = u - d$. La matrice de n dans la base (e_1, e_2, e_3) est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc n est nilpotente. Puis d et n commutent car ce sont des polynômes en u .

Notons N et D les matrices respectives de n et u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors (D, N) est la décomposition de Dunford de la matrice A .

Comme $d = p + 2q = \text{Id} + q$ on a :

$$\begin{aligned} d &= \text{Id} + U(u) \circ (u - \text{Id}) \\ &= \text{Id} + (u - 3\text{Id}) \circ (u - \text{Id}) \\ &= u^2 - 4u + 4\text{Id} \end{aligned}$$

Comme $n = u - d = -u^2 + 5u - 4\text{Id}$, il vient :

$$D = A^2 - 4A + 4I_3 \quad \text{et} \quad N = -A^2 + 5A - 4I_3$$

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

12. a) L'endomorphisme v commute avec u , donc avec $u - \lambda_i \text{id}$, on en déduit que $E_{\lambda_i}(u) = \ker(u - \lambda_i \text{id})$ est stable par v .
- b) Pour tout $1 \leq i \leq p$, on note v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$. Comme v est diagonalisable, chaque v_i est diagonalisable. Soit β_i une base de $E_{\lambda_i}(u)$ formée de vecteurs propres de v_i (qui sont aussi et des vecteurs propres de v).

Comme u est diagonalisable, on a $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$, donc $\beta = \text{rec}(\beta_1, \dots, \beta_p)$ est une base de E formée de vecteurs propres de u et de v : c'est une base commune de diagonalisation pour u et v .

13. Soient u et v les endomorphismes canoniquement associés, respectivement, à A et B , donc ils sont diagonalisables et commutent. Il existe donc une base commune de diagonalisation pour u et v . Dans cette base $u - v$ est diagonalisable. Ce qui montre que la matrice $A - B$ est diagonalisable.
14. Appelons p et q les indices de nilpotence respectifs de A et B . Comme A et B commutent on peut utiliser le binôme de Newton :

$$(A - B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k (-B)^{p+q-k}$$

Mais pour $k \geq p$ on a $A^k = 0_n$ et pour $k < p$ alors $p + q - k > q$ donc $B^{p+q-k} = 0_n$. Ainsi $(A - B)^{p+q} = 0_n$ donc $A - B$ est nilpotente.

15. Supposons que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est à la fois diagonalisable et nilpotente. Alors A est semblable à une matrice diagonale D , qui est aussi nilpotente, donc $D = 0_n$ et $A = 0_n$.
16. On suppose que les couples (D, N) et (D', N') vérifient les conditions (1), (2), (3), (4) et que D , N , D' et N' sont des polynômes en A .

On a : $D + N = D + N'$ donc $D - D' = N' - N$. Or D commute avec D' et N commute avec N' (polynômes en A), donc $D - D'$ est diagonalisable (d'après la question 13) et nilpotente (d'après la question 14). La question 15 donne $D = D'$ d'où $N' = N$.

Partie IV - Non continuité de l'application $A \mapsto D$

18. a) $\mathcal{D}$ n'est pas stable par addition :
 $n = 2$, soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, elles sont diagonalisables mais $A + B$ ne l'est pas car elle est nilpotente et non nulle.

Dans le cas général on prend deux matrices par blocs : $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- b) Si P est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{C})$, l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire en dimension finie donc elle est continue.
19. • Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ montrons que M est limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{D}$.
 Le polynôme caractéristique de M est scindé dans $\mathbb{C}$, donc M est trigonalisable. Ainsi il existe P matrice inversible et T une matrice triangulaire telles que $M = PTP^{-1}$ et la diagonale de T est constituée des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de M .

• Fixons momentanément $k \in \mathbb{N}$. On pose :

$$T_k = T + \text{diag} \left(\frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}, \dots, \frac{n}{2^k} \right).$$

On va montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $k \geq k_0$ la matrice T_k est diagonalisable. Les valeurs propres de T_k sont $(\lambda_1 + \frac{1}{2^k}, \lambda_2 + \frac{2}{2^k}, \dots, \lambda_n + \frac{1}{2^k})$.

Soit maintenant $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ avec $i \neq j$.

- Si $\lambda_i = \lambda_j$ alors $\lambda_i + \frac{i}{2^k} \neq \lambda_j + \frac{j}{2^k}$.
- Si $\lambda_i \neq \lambda_j$ et $\lambda_i + \frac{i}{2^k} = \lambda_j + \frac{j}{2^k}$, alors : $|\lambda_i - \lambda_j| = \frac{|i-j|}{2^k} \leq \frac{n}{2^k}$. Comme $\frac{1}{2^k} \xrightarrow{+\infty} 0$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$ on ait :

$$\frac{1}{2^k} \leq \min \left\{ |\lambda_\ell - \lambda_m| \mid (\ell, m) \in \{1, \dots, n\}^2 \text{ et } \lambda_\ell \neq \lambda_m \right\}.$$

Ainsi, pour $k \geq k_0$ on a : $\lambda_i + \frac{i}{2^k} \neq \lambda_j + \frac{j}{2^k}$.

Ainsi pour $k \geq k_0$, la matrice T_k admet n valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable, et PT_kP^{-1} aussi.

- Enfin on a $T_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} T$.

Comme l'application $A \mapsto PAP^{-1}$ est continue, il vient :

$$PT_kP^{-1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} PTP^{-1} = A.$$

Conclusion. $\mathcal{D}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

20. On suppose que (D, N) est la décomposition de Dunford de A , de sorte que $\varphi(A) = D$.

- Si $A \in \mathcal{D}$ alors $(D, N) = (A, 0)$ donc $\varphi(A) = A$ et φ est l'application identité sur $\mathcal{D}$.
- Supposons que φ soit continue. Soit A une matrice non diagonalisable. On sait que $\mathcal{D}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$ (19) donc il existe une suite (M_k) de matrices diagonalisables qui converge vers A . On a alors, par continuité de φ :

$$\underbrace{\varphi(M_k)} = M_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \varphi(A).$$

Par unicité de la limite, il vient $\varphi(A) = A$ donc la matrice A est diagonalisable, ce qui est absurde.

Conclusion. L'application φ n'est pas continue.

FIN DE LA CORRECTION
