# Composition n° 3, bis. Une correction

## Partie I - Le lemme de Schur et le centre de $\mathbb{E}$

1. On suppose que pour tout $x$ dans $E$ on a : $(x, f(x))$ lié.
   a) Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $E$. Pour tout $k$ dans $\{1, \ldots, p\}$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{k}$ tel que :
   $$f(e_k) = \lambda_k e_k.$$
   Soit maintenant $k$ dans $\{2, \ldots, p\}$. Il existe $\mu \in \mathbb{k}$ tel que $f(e_1 + e_k) = \mu(e_1 + e_k)$.
   Comme $f(e_1 + e_k) = f(e_1) + f(e_k) = \lambda_1 e_1 + \lambda_k e_k$, il vient :
   $$(\lambda_1 - \mu)e_1 + (\lambda_k - \mu) = 0.$$
   Par liberté de $(e_1, e_k)$, on obtient $\mu = \lambda_1 = \lambda_k$. Une application linéaire étant entièrement déterminée sur les éléments d'une base, $f$ est l'homothétie de rapport $\lambda_1$.
   b) La réponse est non. On suppose $E$ de dimension quelconque. Pour tout $x$ dans $E$ on dispose de $\lambda_x$ dans $\mathbb{k}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$ et il s'agit de montrer que la fonction $x \mapsto \lambda_x$ est constante sur $E$. Fixons $x$ non nul dans $E$. Pour $y$ dans $E$, on a :
   $$f(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y \quad \text{et} \quad f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y).$$
   Comme à la question précédente, si $(x, y)$ est libre, il vient $\lambda_y = \lambda_x$.
   Si maintenant $(x, y)$ est une famille liée, alors il existe $\alpha$ dans $\mathbb{k}$ tel que :
   $$y = \alpha x.$$
   Il vient alors $f(y) = \alpha f(x) = \alpha\lambda_x x$ et $f(y) = \lambda_y y = \alpha\lambda_x x$. Comme $x$ est non nul, on obtient : $\alpha\lambda_x = \alpha\lambda_y$.
   Si maintenant $\alpha = 0$ alors $y = 0$ et on a bien $f(y) = \lambda_x y$. Sinon $\alpha$ est non nul et il vient $\lambda_y = \lambda_x$.

   **Conclusion.** La fonction $x \mapsto \lambda_x$ est bien constante sur $E$ et $f$ est une homothétie.

2. a) Soit $x$ dans $E \setminus 0$. Il existe alors une suite $(x_n)$ dans $D$ telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} x$. Quitte à tronquer la suite $(x_n)$, on peut supposer que $\|x_n\| \geqslant \varepsilon > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis, pour chaque $n$ dans $\mathbb{N}$, il existe $\lambda_n \in \mathbb{k}$ tel que $f(x_n) = \lambda_n x_n$. Par continuité de $f$ (qui est une application linéaire en dimension finie), on a $f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ donc $\lambda_n x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(x)$. Mais la suite $(\|x_n\|)$ est minorée, et la suite $(\lambda_n x_n)$ est bornée (puisque convergente). Ainsi la suite $(\lambda_n)$ est bornée dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ : elle admet une sous-suite convergente. Il existe ainsi $\beta$ extraction telle que $\lambda_{\beta(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{R}$. On a alors $\lambda_{\beta(n)} x_{\beta(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \lambda x$. Par unicité de la limite, il vient :
   $$f(x) = \lambda x.$$
   Ainsi $(x, f(x))$ est lié pour tout $x$ dans $E$ : $f$ est une homothétie.
   b) On prend $x_0 \in D$ ainsi que $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset D$. Mais, pour $x$ et $y$ libres dans $D$ on écrit encore $f(x) = \lambda_x x$ et $f(x) = \lambda_y y$ où...Si maintenant $z$ est un point du segment $[x, y]$, on a $t \in ]0, 1[$ tel que $z = tx + (1-t)y$ et $f(z) = \lambda_z z$ puisque $z \in B(x_0, r)$. Il vient alors, toujours par le même raisonnement utilisant la liberté :
   $$\lambda_z = \lambda_x = \lambda_z.$$
   Enfin, $\text{vect}(D) = E$, ce qui permet de conclure.

3. a) Raisonnons par l'absurde et supposons que $f$ n'est pas une homothétie. Selon la question I.1a), il existe $x_0$ dans $E$ tel que $(x_0, f(x_0))$ est libre. On considère alors $F = \text{vect}(x_0)$ et $G$ un supplémentaire de $F$ dans $E$ qui contient $f(x_0)$. Soit $p$ la projection sur $F$ parallèlement à $G$. On a alors $p \in \mathcal{L}(E)$ et :
   $$\begin{cases} f \circ p(x_0) = f(x_0) \\ p \circ f(x_0) = 0_E \end{cases}$$

Ainsi $f \circ p \neq p \circ f$, ce qui contredit le fait que $f$ commute avec tous les endomorphismes de $E$.

**Conclusion.** $\boxed{f \text{ est une homothétie}}$.

b) On vient de voir que si $f \in c(\mathcal{L}(E))$ alors $f$ est une homothétie. Réciproquement, une homothétie est clairement dans $c(\mathcal{L}(E))$.

c) Le centre de $\mathbb{E}$ est donc l'ensemble des matrices scalaires i.e. de la forme $\lambda I$.

# Partie II

## A - Trace et dual de $\mathbb{E}$

1. On écrit $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}E_{i,j}$.

   On a alors $AE_{i_0,j_0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\underbrace{E_{i,j}E_{i_0,j_0}}_{=\delta_{i_0}^{j}E_{i,j_0}} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i_0}E_{i,j_0}$, où $\delta_{i_0}^{j}$ est le symbole de Kronecker. Ainsi , par linéarité de la trace, il vient :

$$\varphi_A(E_{i_0,j_0}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i_0}\underbrace{\mathrm{tr}(E_{i,j_0})}_{\delta_i^{j_0}} = a_{j_0,i_0}$$

2. $\varphi$ est clairement linéaire et si $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{E}$ vérifie $\varphi_A = 0$, alors pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ on a :

$$\varphi_A(E_{i,j}) = 0,$$

   donc $a_{j,i} = 0$ : $A$ est la matrice nulle.
   Il en résulte que $\varphi$ est injective, donc bijective puisque $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}^*$ ont **même dimension**.

   **Conclusion.** $\boxed{\varphi : A \mapsto \varphi_A \text{ est un isomorphisme linéaire de } \mathbb{E} \text{ sur } \mathbb{E}^*}$.

3. Dans cette question on suppose $\mathbb{k} = \mathbb{R}$. A l'aide d'une structure euclidienne bien connue sur $\mathbb{E}$, retrouver le fait, démontré à la question précédente, que pour toute forme linéaire $\psi$ sur $\mathbb{E}$, il existe $A \in \mathbb{E}$, unique, tel que : $\psi = \varphi_A$.
4. Soient $U$ et $V$ dans $\mathbb{E}$. Notons $U = [u_{ij}]$, $V = [v_{ij}]$. Appelons $A = UV$ et $B = VU$. Notons encore $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$. On a alors pour tout $i$ et $j$ dans $\{1,\dots n\}$ :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} u_{ik}v_{kj} \quad \text{et} \quad b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} v_{ik}u_{kj}$$

   Il vient donc $\mathrm{tr}(UV) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} u_{ik}v_{ki}$ et :

$$\mathrm{tr}(VU) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} v_{ik}u_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} u_{ki}v_{ik} = \mathrm{tr}(UV)$$

   On a donc $\boxed{\mathrm{tr}(UV) = \mathrm{tr}(VU)}$.

5. Puisque $\varphi$ est un isomorphisme, il existe $A \in \mathbb{E}$ telle que, pour tout $M \in \mathbb{E}$, on ait :

$$\psi(M) = \mathrm{tr}(AM).$$

   Puis, pour tout $(M,N)$ dans $\mathbb{E}^2$, il vient :

$$\underbrace{\mathrm{tr}(AMN)}_{\varphi_{AM}(N)} = \mathrm{tr}(ANM) = \underbrace{\mathrm{tr}(MAN)}_{\varphi_{MA}(N)}.$$

Ainsi on a $\varphi(AM) = \varphi(MA)$, en fixant provisoirement $M$, on obtient :

$$\varphi_{AM} = \varphi_{MA}.$$

Comme $\varphi$ est un isomorphisme, il reste $AM = MA$, et ce pour tout $M \in \mathbb{E}$. La matrice $A$ est donc dans le centre $\mathbb{E}$ qui est constitué des matrices scalaires : il existe $\lambda$ réel tel que $A = \lambda I$ ; cela conduit au résultat souhaité.

## B - Trace et crochet

1. a) • On suppose que $f$ est une homothétie de rapport $\lambda$. Comme $\mathrm{tr}(M) = n\lambda$, il vient $\lambda = 0$ de sorte que $f = 0$ et $M = 0$ : tout est évident.

   • Si maintenant $f$ n'est pas une homothétie, selon la question I.1a), il existe $\varepsilon \in \mathbb{k}^n$ tel que $(\varepsilon, f(\varepsilon))$ est libre. On complète cette famille libre en une base $\gamma$ de $\mathbb{k}^n$ et la matrice de $f$ dans cette base est de la forme :

$$N = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & & * \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & ? & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

   Comme $M$ et $N$ représentent le même endomorphisme, elles sont semblables.

   b) On suppose que toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{k})$ de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les termes diagonaux sont nuls. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ de trace nulle. Selon la question précédente, $M$ est semblable à une matrice de la forme :

$$N = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \ell \\ \hline c & R \end{array}\right),$$

   où $R \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{k})$, $\ell$ est une ligne de taille $n-1$ et $c$ une colonne de taille $n-1$. Comme $M$ et de trace nulle, $N$ aussi, puisque $M$ et $N$ sont semblables. Ainsi $\mathrm{tr}(R) = 0$. Il existe donc $Q$ dans $GL_{n-1}(\mathbb{k})$ tel que $S = QRQ^{-1}$ où $S$ est une matrice dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{k})$ dont tous les termes diagonaux sont nuls.

   On pose $P = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & & * \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ qui est inversible d'après la question précédente, d'inverse :

$$P^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & & * \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1} & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

   On a alors :

$$PNP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \ell Q^{-1} \\ Qc & QRQ^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ell Q^{-1} \\ Qc & S \end{pmatrix},$$

   qui est une matrice de trace nulle.

   Enfin, pour $n = 1$, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ de trace nulle est nulle donc semblable à une matrice à diagonale nulle. On peut alors conclure par récurrence.

2. Lorsque $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $M \in \mathbb{E}$, on trouve sans peine que :

$$[D, M] = \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_1 - \lambda_2)m_{1,2} & \cdots & \cdots & (\lambda_1 - \lambda_n)m_{1,n} \\ (\lambda_2 - \lambda_1)m_{2,1} & 0 & & & \\ \vdots & & & & \\ (\lambda_n - \lambda_1)m_{n,1} & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant $M$ une matrice à terme diagonaux nuls, $M = [m_{i,j}]$. On considère $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distincts dans $\mathbb{R}$ et, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, on pose : $n_{n,j} = \dfrac{m_{i,j}}{\lambda_i - \lambda_j}$, ce qui définit une matrice $N$ de $\mathbb{E}$ telle que $M = [D, N]$.

3. Si $A$, $B$ sont dans $\mathbb{E}$ et si $P \in GL_n(\mathbb{K})$, on a alors (petit calcul) :

$$P[A, B]P^{-1} = [PAP^{-1}, PBP^{-1}].$$

**Conclusion.** $\boxed{\text{Toute matrice semblable à un crochet est un crochet}}$.

4. Toute matrice $M$ de trace nulle est un crochet : cela résulte de suite des questions B1c, B2b et B3.

## Partie III - Commutant

Soit $A \in \mathbb{E}$. Le commutant de $A$ est : $c(A) = \{M \in \mathbb{E} \mid [A, M] = 0\}$.

On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à $A$. Le commutant de $f$ est :

$$c(f) = \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) \mid [f, g] = 0\}.$$

1. **Généralités sur le commutant.**

a) • Je laisse le soin au lecteur de vérifier que $c(A)$ est une sous-algèbre unitaire de $\mathbb{E}$.

• Si maintenant $B \in \mathbb{K}[A]$, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = P(A)$ et alors :

$$AB = AP(A) = (XP)(A) = (PX)(A) = P(A)A = BA,$$

ce qui démontre que $\mathbb{K}[A] \subset c(A)$.

b) Soit $B$ dans $c(A)$. Puisque $\beta = (V, AV, \dots, A^{n-1}V)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe $a_0, \dots, a_{n-1})$ dans $\mathbb{K}$ tels que :

$$BV = \sum_{i=0}^{n-1} A^i V.$$

Montrons alors $B = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A^i$. Il suffit de montrer cela sur la base $\beta$.

Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$. On a alors, puisque $A$ et $B$ commutent :

$$B(A^k V) = A^k(BV) = \sum_{i=0}^{n-1} A^k(A^i V) = \sum_{i=0}^{n-1} A^i(A^k V).$$

Ainsi « les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ » $B$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A^i$ sont égaux sur la base $\beta$ : ils sont égaux.

Il en résulte que $B = P(A)$ où $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} X^i \in \mathbb{K}_{n-1}(A)$ et ainsi $c(A) \subset \mathbb{K}_{n-1}[A]$ (ensemble des polynômes en $A$ de degré inférieur à $n-1$).

D'après la question précédente, on a : $\mathbb{K}_{n-1}[A] \subset \mathbb{K}[A] \subset c(A)$.

**Conclusion.** $\boxed{c(A) = \mathbb{K}_{n-1}[A]}$.

2. a) • On suppose que $g \in c(f)$. Soient $i \in \{1, \dots, p\}$ et $x$ dans $E_{f,i}$. On a donc $f(x) = \lambda_i x$. Ainsi

$$f[g(x)] = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g[f(x)] = \lambda_i g(x).$$

Il en résulte que $g(x) \in E_{f,i}$ : $E_{f,i}$ est $g$-stable.

• On suppose que, pour tout $i$ dans $\{1, \dots, p\}$, $E_{f,i}$ est stable par $g$. Fixons provisoirement $i$ dans $\{1, \dots, p\}$. Pour tout $x$ dans $E_{f,i}$, comme $E_{f,i}$ est stable par $g$, on a $g(x) \in E_{f,i}$, donc

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = \lambda_i g(x) = g(\lambda_i x) = g \circ f(x).$$

Prenons maintenant $x$ dans $E$. Comme $f$ est diagonalisable, on a $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{f,i}$. Ainsi $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$, avec $x_i \in E_{f,i}$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$. Il vient alors :

$$f \circ g(x) = \sum_{i=1}^{p} f \circ g(x_i) = \sum_{i=1}^{p} g \circ f(x_i) = g \circ f(x).$$

Ceci étant valable pour tout $x$ dans $E$, on peut donc conclure que $f \circ g = g \circ f$.

**Conclusion.** $g \in c(f)$ si et seulement si, pour $i \in \{1, \dots, p\}$, $E_{f,i}$ est $g$-stable.

b) Le polynôme minimal de $A$ est $\mu_A = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$. La famille $(I, A, \dots, A^p)$ est donc liée et $(I, A, \dots, A^{p-1})$ est libre : cette dernière famille est donc une base de $\mathbb{k}[A]$ **Conclusion.** $\dim \mathbb{k}[A] = p$.

c) Soit $g \in c(f)$. Notons que, pour $i \in \{1, \dots, p\}$, cahque $E_{f,i}$ est $g$-stable, ce qui permet de considérer l'endomorphisme induit $\substack{g\\i}$ par $g$ sur $E_{f,i}$. Notons aussi que $r_i^2$ est la dimension de $\mathcal{L}(E_i)$. On considère alors naturellement l'application

$$\Phi : c(f) \to \prod_{i=1}^{p} \mathcal{L}(E_i),$$

qui à $g$ dans $c(f)$ associe $(g_1, \dots, g_p)$. Cette application $\Phi$ est linéaire (par exemple par composantes). Montrons que c'est un isomorphisme.

• Montrons que $\Phi$ est injective. Soit $g \in \ker \Phi$. On alors, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $g_i = 0$. Mais si $x \in \mathbb{k}^n$, on écrit $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ selon $\mathbb{k}^n = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et il vient :

$$g(x) = \sum_{i=1}^{p} g(x_i) = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{g_i(x_i)}_{=0} = 0.$$

Ainsi $g = 0$ et $\Phi$ est injective.

• Montrons que $g$ est surjective. On prend $(f_1, \dots, f_p) \in \prod_{i=1}^{p} \mathcal{L}(E_i)$. On définit alors correctement un élément $g$ de $\mathcal{L}(\mathbb{k}^n)$ en posant, pour $x \in \mathbb{k}^n$, écrit $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ selon $\mathbb{k}^n = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ : $g(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x_i)$.

Puisque chaque $f_i$ commute avec $\lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{k}^n}$ il vient de suite $f \circ g = g \circ f$ de sorte que $g \in c(f)$. Comme $\Phi(g) = (f_1, \dots, f_p)$, $\Phi$ est surjective.

De là, $\Phi$ est un isomorphisme linéaire de $c(f)$ sur $\prod_{i=1}^{p} \mathcal{L}(E_i)$ qui est de dimension $\sum_{i=1}^{p} r_i^2$.

**Conclusion.** $\boxed{\dim c(A) = \sum_{i=1}^{p} r_i^2}$.

d) Comme $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{k}) = \bigoplus_{i=1}^{p} \ker(A - \lambda_i I)$, on a $n = \sum_{i=1}^{p} r_i$. Mais chaque $r_i \geqslant 1$ donc $\sum_{i=1}^{p} r_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{p} r_i = n$, ce qui démontre que $\dim c(A) \geqslant n$.

Supposons maintenant que $n = \dim c(A)$. Il vient alors $\sum_{i=1}^{p} r_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{p} r_i = n$, ce qui qui est équivalent à dire que chaque $r_i = 1$ et ce qui force $p = n$.

**Conclusion.** $\boxed{\dim c(A) \geqslant n \text{ avec égalité si et seulement si } A \text{ admet } n \text{ valeurs propres distinctes}}$.

e) • Supposons que $A$ admette $n$ valeurs propres distinctes (i.e. $p = n$). Selon la question précédente, on a $\dim c(A) = n$. Mais $\mathbb{k}[A] \subset C(u)$ et $\dim \mathbb{k}[A] = n$, selon la question II2b). Il en résulte que $c(A) = \mathbb{k}[A]$.

• Supposons maintenant que $c(A) = \mathbb{k}[A]$. On a donc $\dim c(A) = \dim \mathbb{k}[A] = p$. Ainsi, d'après la question précédente, $p \geqslant n$. Or $A$ ne peut avoir plus de $n$ valeurs propres, donc $p = n$. Ainsi $A$ admet $n$ valeurs propres distinctes.

**Conclusion.** $\boxed{c(A) = \mathbb{k}[A] \text{ si et seulement si } A \text{ admet } n \text{ valeurs propres distinctes}}$.

3. **Centre du commutant**

a) • Soit $M$ dans $C_2(A)$. Pour tout $N$ dans $C(A)$ on a donc $MN = NM$. Mais $A \in C(A)$, donc $MA = AM$ et ainsi $M \in c(A)$.

• Soit $M \in \mathbb{k}[A]$. Il existe $P \in \mathbb{k}[X]$ tel que $M = P(A)$. Si maintenant $M \in C(A)$, $M$ commute avec tout polynôme en $A$, donc avec $M$. Ainsi, pour tout $N$ dans $C(A)$, on a : $MN = NM$. Il en résulte que $M \in C_2(A)$.

**Conclusion.** $\boxed{c_2(A) \subset c(A) \text{ et } \mathbb{k}[A] \subset c_2(A)}$.

b) On a déjà l'inclusion $\mathbb{k}[A] \subset C_2(u)$, d'après la question précédente. Il reste à démontrer l'inclusion réciproque. On travaille en terme d'endomorphisme. Soient $f$ et $g$ les endomorphismes de $\mathbb{k}^n$ canoniquement associés à $A$ et $B$ respectivement. On note, pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, $E_i = \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{k}^n})$. Comme $g \in c_2(f) \subset c(f)$, chaque $E_i$ est $g$-stable, ce qui permet de considérer l'endomorphisme $g_i$ induit par $g$ sur $E_i$.
Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, prenons $h_i \in \mathcal{L}(E_i)$. On a déjà vu que l'on définit une application linéaire $h$ de $\mathbb{k}^n$ en posant :

$$h(x) = \sum_{i=1}^{p} h_i(x_i),$$

dès que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ selon $\mathbb{k}^n = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.
L'application $h$ commute avec $f$ (déjà vu). Ainsi, $g \circ h = h \circ g$ puisque $g \in c_2(f)$. Puis, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et tout $x \in E_i$ on a :

$$g_i \circ h_i(x) = g \circ h(x) = h \circ g(x) = h_i \circ g_i(x).$$

Ainsi, chacune des $g_i$ est dans le centre de $\mathcal{L}(E_i)$, donc est une homothétie : il existe alors $\mu_i$ dans $\mathbb{k}$ tel que $g_i = \mu_i \mathrm{Id}_E$.
On prend un polynôme $P$ dans $\mathbb{k}_{p-1}(X)$ tel que, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ on ait $P(\lambda_i) = \mu_i$ (interpolateur de Lagrange).
Il vient sans peine $P(f) = g$ i.e. $P(A) = B$, ce qui prouve que $c_2(A) \subset \mathbb{k}[A]$.
**Conclusion.** $\boxed{c_2(A) = \mathbb{k}[A]}$.

4. a) $\psi : (U, V) \mapsto \langle U, V \rangle = \mathrm{tr}(UV)$ de $\mathbb{E}^2$ dans $\mathbb{k}$ est facilement une forme bilinéaire symétrique. Si maintenant $U$ est dans le « noyau » de $\psi$ i.e. vérifie $\mathrm{tr}(UV) = 0$ pour tout $V$ dans $\mathbb{E}$, alors $\varphi_U = 0$ donc $U = 0$ (voir

l'isomorphisme $\varphi$ de la question II-A2) : ainsi $\psi$ est non dégénérée.

b) L'endomorphisme $\mathrm{ad}_A$ est facilement linéaire. Soient $M$ et $N$ dans $\mathbb{E}$. On a alors :

$$\begin{cases} \langle \mathrm{ad}_A(M), N\rangle = \mathrm{tr}([A,M]N) = \mathrm{tr}(AMN - MAN) \\ \langle M, \mathrm{ad}_A(N)\rangle = \mathrm{tr}(M[A,N]) = \mathrm{tr}(MAN - MNA) \end{cases}.$$

Ainsi $\langle \mathrm{ad}_A(M), N\rangle + \langle M, \mathrm{ad}_A(N)\rangle = \mathrm{tr}(AMN - MNA) = \mathrm{tr}([A, MN]) = 0$, donc $\mathrm{ad}_A$ est antisymétrique pour $\langle\ ,\ \rangle$.

c) On a : $(i) \Leftrightarrow B \in \mathrm{Im}\,\mathrm{ad}_A$. En notant que $c(A) = \ker \mathrm{ad}_A$, on a :

$$(ii) \Leftrightarrow B \in (\ker \mathrm{ad}_A)^{\perp}.$$

Puis, pour $M \in \mathbb{E}$ et $N \in \ker \mathrm{ad}_A$, on a :

$$0 = \langle \mathrm{ad}_A(M), N\rangle + \langle M, \mathrm{ad}_A(N)\rangle = \langle \mathrm{ad}_A(M), N\rangle\,,$$

donc $\mathrm{ad}_A(M) \in (\ker \mathrm{ad}_A)^{\perp}$ et ainsi : $\underline{\mathrm{Im}\,\mathrm{ad}_A \subset (\ker \mathrm{ad}_A)^{\perp}}$ ($\clubsuit$).
Puis, puisque $\psi$ est non-dégénérée, on a $\dim \ker \mathrm{ad}_A + \dim(\ker \mathrm{ad}_A)^{\perp} = n^2$. Via le théorème du rang, on a aussi :

$$\dim \mathrm{Im}\,\mathrm{ad}_A + \dim \ker \mathrm{ad}_A = n^2.$$

Il vient ainsi $\dim \mathrm{Im}\,\mathrm{ad}_A = \dim(\ker \mathrm{ad}_A)^{\perp}$. Avec ($\clubsuit$), on peut conclure que $\mathrm{Im}\,\mathrm{ad}_A = (\ker \mathrm{ad}_A)^{\perp}$, ce qui démontre que $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

5. a) On écrit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où .... On a alors : $P(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n$. Il vient : $\mathrm{tr}\big(P(A)\big) = a_0 \mathrm{tr}(I) + a_1 \mathrm{tr}(A) + \cdots + a_n \mathrm{tr}(A^n) = n a_0 = nP(0)$.

b) Soit $\mu_A$ le polynôme minimal de $A$. On a $\mu_A(A) = 0$ donc $n\mu_A(0) = \mathrm{tr}\big(P(A)\big) = 0$. Ainsi $\mu_A(0) = 0$, de sorte que 0 est racine de $\mu_A$ donc valeur propre de $A$.

c) La matrice $A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable. Comme 0 est valeur propre de $A$, elle est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & * \\ 0 & * & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Mais la matrice $A_1$ obtenu à partir de la matrice ci-dessus en rayant la première ligne et la première colonne vérifie tout autant $\mathrm{tr}(A_1^i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ entier. Une récurrence sur $n$ permet alors d'assurer le résultat suivant : *$A$ est semblable à une matrice de la forme*

$$\begin{pmatrix} 0 & & & * \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $A$ est nilpotente.

6. $(iii) \Rightarrow (iv)$. On suppose que $A$ est nilpotente d'ordre $p$. Pour tout $M$ dans $c(A) = \ker \mathrm{ad}_A$, $MA$ est aussi nilpotente (en effet, comme $AM = MA$, on a $(MA)^p = M^p A^p = 0$). Ainsi $\mathrm{tr}(MA) = 0$, ce qui permet de dire que $A \in (\ker \mathrm{ad}_A)^{\perp} = \mathrm{Im}\,\mathrm{ad}_A$ : $(iv)$ est vérifiée.

$(iv) \Rightarrow (iii)$ On suppose $(iv)$, c'est à dire que $A \in \mathrm{Im}\, ad_A = (\ker ad_A)^{\perp} = c(A)^{\perp}$. Ainsi pour tout $M$ dans $c(A)$, on a $\mathrm{tr}(MA) = 0$. En particulier, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, il vient :

$$\mathrm{tr}(A^i) = \mathrm{tr}(A^{i-1}A) = 0.$$

Selon la question précédente, $A$ est nilpotente.

## Partie IV - Autour de la structure multiplicative de $\mathbb{E}$

Dans cette partie, on suppose que $n \geqslant 2$.

### A - Une propriété des hyperplans de $\mathbb{E}$ stables par multiplication

1. • Soit $M \in F \cap \operatorname{vect}(I_n)$. Comme $F \in \operatorname{vect}(I_n)$ on dispose de $\lambda$ réel tel que $M = \lambda I_n$. Mais si $\lambda \neq 0$, comme $M \in F$, la matrice $\dfrac{1}{\lambda}M$ appartient à $F$ i.e. $I_n \in F$ ce qui est une absurdité. Il en résulte que $\lambda = 0$ donc $M = 0$. On a donc :
$$\boxed{F \cap \operatorname{vect}(I_n) = \{0\}} \quad (*)$$
   • Puis $\dim \operatorname{vect}(I_n) + \dim F = 1 + n^2 - 1 = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$ donc, avec $(*)$, on peut conclure que :
$$\boxed{\mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R}) = F \oplus \operatorname{vect}(I_n)}.$$

2. a. Soit $(M, M') \in \mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})^2$. On écrit $M = N + \lambda I_n$ et $M' = N' + \lambda' I_n$ selon $\mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R}) = F \oplus \operatorname{vect}(I_n)$ où $\lambda$ et $\lambda'$ sont dans $\mathrm{I\!k}$. On a alors :
$$p(M) = \lambda I_n \quad \text{et} \quad p(M') = \lambda' I_n$$
   donc $p(M)p(M') = \lambda\lambda' I_n$. $\quad (\spadesuit)$
   Puis $MM' = (N + \lambda I_n)(N' + \lambda' I_n) = NN' + \lambda N' + \lambda' N + \lambda\lambda' I_n$. Comme $F$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$ stable sous la multiplication matricielle, on a $NN' + \lambda N' + \lambda' N \in F$. Par unicité de la décomposition selon la somme directe $\mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R}) = F \oplus \operatorname{vect}(I_n)$ on a :
$$p(MM') = \lambda\lambda' I_n$$
   ce qui prouve, avec $(\spadesuit)$, que $\boxed{p(MM') = p(M)p(M')}$.

   b. Supposons que $M^2 \in F$. On a alors $p(M^2) = 0$. Mais $p(M^2) = p(M)^2$ selon la question précédente et $p(M) \in \operatorname{vect}(I_n)$ donc il existe $\lambda$ réel tel que $p(M) = \lambda I_n$. Il vient alors :
$$0 = p(M^2) = p(M)^2 = \lambda^2 I_n$$
   ce qui force $\lambda = 0$ i.e. $p(M) = 0$. Il vient alors $M \in \ker p = F$ comme voulu.

   c. • Soit $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$. On trouve sans difficulté que :
$$\boxed{E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_j^k E_{i,\ell}}$$
   Ainsi $E_{i,j}^2 = \delta_{i,j}E_{i,j}$.
   — Si $i \neq j$ alors $E_{i,j}^2 = 0 \in F$ donc $E_{i,j} \in F$ selon la question 2b.
   — Si $i = j$ on a $E_{i,i} = E_{i,k}E_{k,i}$ pour tout $k$ dans $\{1, \dots, n\}$. Prenons $k \neq i$ dans $\{1, \dots, n\}$. Selon ce qui précède, $E_{i,k}$ et $E_{k,i}$ sont dans $F$ donc $E_{i,i}$ aussi.

   On a ainsi démontré que $E_{i,j} \in F$.

   • $F$ contient donc une base de $\mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$ ce qui permet de dire que $F = \mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$ : ceci est bien sûr une stupidité puisque $\dim F = n^2 - 1$ : il n'existe pas d'hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$ stable sous le produit qui ne contient pas $I_n$.

### B - Représentation des éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{E})$.

1. a) On a $f_{A,B^\top}(E_{1,1}) = AE_{1,1}B^\top = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,1}E_{i,1}B^\top = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{k,1}E_{i,j}\right)$.

   La première colonne de la matrice $[f_{A,B^\top}]_\beta$ est celle de $C = A \otimes B$. On vérifie que c'est la même chose pour les autres colonnes...

   **Conclusion.** $\boxed{[f_{A,B^\top}]_\beta = A \otimes B}$.

b) On a :

$$\begin{aligned} f_{E_{k,l},E_{m,p}}(E_{i,j}) &= E_{k,l}E_{i,j}E_{m,p} = \delta_i^{\ell} E_{k,j}E_{m,p} \\ &= \delta_i^j \delta_j^m E_{k,p} = \begin{cases} E_{k,p} & \text{si } i = l \text{ et } j = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

c) Notons $L : \xi \mapsto L_\xi$ qui est linéaire de $V$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ (facile...). Soit $\xi$ dans $\ker L$. On a $L_\xi = 0$ donc, pour $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, on a $L_\xi(E_{i,j}) = 0$. Mais on a : $L_\xi(E_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} \xi(k,l,j,p)E_{k,p}$. Par liberté, il vient :

$$\xi(k,l,j,p) = 0,$$

et ce pour tout $(k,l,j,p) \in \{1,\dots,n\}^2$. Ainsi $\xi = 0$ et $L$ est injective.
Puis $\dim \mathcal{L}(\mathbb{E}) = n^4 = \dim V$, donc $L$ est un isomorphisme vectoriel. En particulier $L$ est surjectif : pour tout $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$, il existe $\xi$ unique dans $V$ tel que $L_\xi = \psi$. On a alors :

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{(k,l,m,p)\in\{1,\dots,n\}^4} \xi(k,l,m,p) f_{E_{k,l},E_{m,p}} \\ &= \sum_{(k,l,m,p)\in\{1,\dots,n\}^4} f_{\xi(k,l,m,p)E_{k,l},E_{m,p}} \end{aligned}$$

L' application linéaire $\psi$ est donc une somme finie d'application du type $f_{U,V}$ avec $U$ et $V$ dans $\mathbb{E}$.

2. Supposons par exemple que $A_p = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i A_i$ où $\alpha_1,\dots,\alpha_{p-1}$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{i=1}^{p} f_{A_i,B_i} = \sum_{i=1}^{p-1} f_{A_i,B_i} + f_{p-1}\sum_{j=1}^{} \alpha_j A_j, B_p \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} f_{A_i,B_i} + \sum_{i=1}^{p-1} f_{A_i,\alpha B_p} = \sum_{i=1}^{p} f_{A_i,B_i+\alpha B_p} \end{aligned}$$

et $\psi$ admet une représentation de longueur $p-1$, ce qui est contradictoire.

La même idée montre que les familles $(A_1,\dots,A_p)$ et $(B_1,\dots,B_p)$ sont libres.

3. On a alors $\sum_{i=1}^{p} f_{A_i,B_i} = \sum_{i=1}^{p} f_{A_i,B_i'}$, ce qui amène :

$$\sum_{i=1}^{p} f_{A_i,C_i} = 0,$$

où $C_i = B_i - B_i'$. On veut alors démontrer que $C_1 = \ldots = C_p = 0$. D'après la question IV B.1a), en notant $A_i = [a_{k,l}^i]$, on a donc :

$$\sum_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} a_{1,1}^i C^\top{}_i & \cdots & \cdots & a_{1,n}^i C^\top{}_i \\ a_{2,1}^i C^\top{}_i & \cdots & \cdots & a_{2,n}^i C^\top{}_i \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1}^i C^\top{}_i & \cdots & \cdots & a_{n,n}^i C^\top{}_i \end{pmatrix} = 0.$$

Fixons $(k,l) \in \{1,\dots,n\}^2$. On a alors : $\underbrace{\sum_{i=1}^{p} a_{k,\ell}^i C^\top{}_i}_{\in\mathbb{E}} = 0$. Appelons $\alpha_i$ le coefficient en case $(1,1)$ de $C^\top{}_i$. Il vient alors :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_{k,\ell}^i = 0.$$

ceci étant valable pour tous les couples $(k, l)$, on a $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i A_i = 0$ et par liberté $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0$. De la même manière, tous les autres coefficients des matrices ${C^\top}_i$ sont nuls : on obtient bien $C_1 = \ldots = C_p = 0$. $\square$