Composition n° 3, bis

Le samedi 30 novembre 2024

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*La **présentation** de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.*

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Dans tout le problème, $\mathbb{k}$ est le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n est dans $\mathbb{N}^*$. On s'intéresse à l'algèbre $\mathbb{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ et à certains objets qui lui sont attachés : centre, trace, dual, crochet...

On note, pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $E_{i,j}$ l'élément de $\mathbb{E}$ dont tous les termes sont nuls sauf celui de place (i, j) qui est de valeur 1.

Pour $A \in \mathbb{E}$ on note encore $\mathbb{k}[A] = \{M \in \mathbb{E} \mid (\exists P \in \mathbb{k}[X]) (M = P(A))\}$.

Partie I - Le lemme de Schur et le centre de $\mathbb{E}$

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $p \geq 2$ et f dans $\mathcal{L}(E)$

1. On suppose que pour tout x dans E on a : $(x, f(x))$ lié.
 - a) Démontrer que f est une homothétie.
 - b) L'hypothèse E de dimension finie est-elle indispensable?
2. On suppose qu'il existe une partie D de E telle que pour tout x dans D on ait : $(x, f(x))$ lié. La fonction f est-elle une homothétie dans les cas suivants :
 - a) D est dense dans E ;
 - b) D est d'intérieur non vide dans E .
3. On suppose que f commute avec chaque élément de $\mathcal{L}(E)$, autrement dit, pour chaque g dans $\mathcal{L}(E)$ on a :

$$[f, g] = 0 \quad \text{où} \quad [f, g] = f \circ g - g \circ f.$$

- a) Démontrer que f est une homothétie.
- b) En déduire le centre de $\mathcal{L}(E)$ c'est à dire l'ensemble :

$$c(\mathcal{L}(E)) = \{h \in \mathcal{L}(E) \mid (\forall g \in \mathcal{L}(E)) ([g, h] = 0)\}.$$

- c) En terme matriciel, quel est le centre de $\mathbb{E}$?

Partie II

On note tr la forme linéaire sur $\mathbb{E}$ définie, lorsque $M = [m_{i,j}] \in \mathbb{E}$, par : $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$.

A - Trace et dual de $\mathbb{E}$

Pour $A \in \mathbb{E}$, on note $\varphi_A : M \mapsto \text{tr}(AM)$ de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{k}$.

Le dual de $\mathbb{E}$ est $\mathbb{E}^* = \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{k})$.

1. Pour A dans $\mathbb{E}$ et $(i_0, j_0) \in \mathbb{E}^2$, calculer $\varphi_A(E_{i_0, j_0})$.
2. En déduire que $\varphi : A \mapsto \varphi_A$ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{E}^*$.
3. Dans cette question on suppose $\mathbb{k} = \mathbb{R}$. A l'aide d'une structure euclidienne bien connue sur $\mathbb{E}$, retrouver le fait, démontré à la question précédente, que pour toute forme linéaire ψ sur $\mathbb{E}$, il existe $A \in \mathbb{E}$, unique, tel que : $\psi = \varphi_A$.
4. Vérifier que pour tout $(U, V) \in \mathbb{E}^2$ on a $\text{tr}(UV) = \text{tr}(VU)$.
5. Soit ψ une forme linéaire sur $\mathbb{E}$ tel que :

$$(\forall (M, N) \in \mathbb{E}^2) (\psi(MN) = \psi(NM)).$$

Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{k}$ tel que $\psi = \lambda \text{tr}$.

B - Trace et crochet

Dans cette partie $\mathbb{k}$ est un corps de caractéristique nulle. Le crochet de deux éléments M et N de $\mathbb{E}$ est défini par :

$$[M, N] = MN - NM.$$

1. Soit M dans $\mathbb{E}$ de trace nulle.
 - a) Démontrer que M est semblable à une matrice dont le terme de place $(1, 1)$ est nul (on pourra utiliser la question I.1).
 - b) Démontrer que M est semblable à une matrice dont tous les termes diagonaux sont nuls.
2. Démontrer que toute matrice M de $\mathbb{E}$ à termes diagonaux nuls est un crochet.
3. Démontrer que toute matrice de $\mathbb{E}$ semblable à un crochet est un crochet.
4. Démontrer que toute matrice M de trace nulle est un crochet.

Partie III - Commutant

Soit $A \in \mathbb{E}$. Le commutant de A est : $c(A) = \{M \in \mathbb{E} \mid [A, M] = 0\}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{k}^n$ canoniquement associé à A . Le commutant de f est :

$$c(f) = \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{k}^n) \mid [f, g] = 0\}.$$

1. Généralités sur le commutant.

- a) Démontrer que $c(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$, stable par multiplication, qui contient l'ensemble $\mathbb{k}[A]$.
 - b) On suppose que A admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{k}$. Déterminer $c(A)$.
 - c) On suppose qu'il existe un vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{k})$ tel que $(X, AX, \dots, A^{n-1}X)$ soit une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{k})$. Déterminer $c(A)$.
2. On suppose que A est diagonalisable dans $\mathbb{k}$ et que ses valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont de multiplicités algébriques respectives $r_1, \dots, r_p$. Pour $i \in \{1, \dots, p\}$, on pose $E_{f,i} = \ker(f - \lambda_i \text{Id}_{\mathbb{k}^n})$.
 - a) Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{k}^n)$. Démontrer que $g \in c(f)$ si et seulement si, pour $i \in \{1, \dots, p\}$, $E_{f,i}$ est g -stable.
 - b) Démontrer que $\dim \mathbb{k}[A] = p$.
 - c) Démontrer que $\dim c(A) = \sum_{i=1}^p r_i^2$.

- d) Démontrer que $\dim c(A) \geq n$ avec égalité si et seulement si A admet n valeurs propres distinctes.
 e) Démontrer que $c(A) = \mathbb{k}(A)$ si et seulement si A admet n valeurs propres distinctes.

3. Centre du commutant

Pour $A \in \mathbb{E}$, on note $c_2(A) = \{M \in \mathbb{E} \mid (\forall N \in c(A)) ([M, N] = 0)\}$. Soit A diagonalisable (sur $\mathbb{k}$) dans $\mathbb{E}$.

- a) Vérifier que $c_2(A) \subset c(A)$ et que $\mathbb{k}[A] \subset c_2(A)$.
 b) Démontrer que $c_2(A) = \mathbb{k}[A]$.

4. Pour A et B dans $\mathbb{E}$, on envisage les énoncés suivants :

$$(i) (\exists M \in \mathbb{E}) (B = [A, M])$$

$$(ii) (\forall M \in c(A)) (\text{tr}(BM) = 0)$$

On veut démontrer que : $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

- a) Démontrer que l'application $(U, V) \mapsto \langle U, V \rangle = \text{tr}(UV)$ de $\mathbb{E}^2$ dans $\mathbb{k}$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.
 b) Démontrer que l'application $\text{ad}_A : M \mapsto [A, M]$ de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$ est linéaire et antisymétrique pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
 c) Traduire les énoncés (i) et (ii) à l'aide de ad_A et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et conclure.
5. On suppose dans cette question, et la suivante, que $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. On considère un élément A de $\mathbb{E}$ tel que :

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}) (\text{tr}(A^i) = 0).$$

- a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré inférieur à n . Calculer $\text{tr}(P(A))$.
 b) En déduire que 0 est valeur propre de A .
 c) Démontrer que A est nilpotente.
6. On suppose toujours que $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. Démontrer l'équivalence des énoncés suivants :

- (iii) A est nilpotente ;
 (iv) $(\exists M \in \mathbb{E}) (A = [A, M])$

Partie IV - Autour de la structure multiplicative de $\mathbb{E}$

Dans cette partie, on suppose que $n \geq 2$.

A - Une propriétés des hyperplans de $\mathbb{E}$ stables par multiplication

On suppose que $n \geq 2$ et que $\mathbb{k}$ est de caractéristique nulle. Soit F un hyperplan de $\mathbb{E}$ de dimension $n^2 - 1$, stable par la multiplication matricielle :

$$(\forall (M, M') \in F^2) (MM' \in F)$$

On suppose que $I_n \notin F$ où I_n est la matrice identité de $\mathbb{E}$.

1. Justifier que $\mathbb{E} = H \oplus \text{vect}(I_n)$.
 2. a. Soit p la projection sur $\text{vect}(I_n)$ parallèlement à F . Démontrer que pour tout $(M, M') \in \mathbb{E}^2$ on a :

$$p(MM') = p(M)p(M')$$

- b. Soit $M \in \mathbb{E}$. Démontrer que si $M^2 \in F$ alors $M \in F$.
 c. Démontrer que pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ on a $E_{i,j} \in F$. Que peut-on conclure ?

B - Automorphismes de $\mathbb{E}$

Un automorphisme de $\mathbb{E}$ est un élément f de $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ tel que :

$$(\forall (M, N) \in \mathbb{E}^2) (f(MN) = f(M)f(N)).$$

On note $\text{Aut}(\mathbb{E})$ l'ensemble des automorphismes de $\mathbb{E}$.

1. Démontrer que $\text{Aut}(\mathbb{E})$ est un sous-groupe de $\text{GL}(\mathbb{E})$ c'est à dire que la composée de deux automorphismes et l'inverse d'un automorphisme sont encore des automorphismes.
2. Lorsque $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, on note F_A l'application de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$ définie par :

$$F_A(M) = AMA^{-1}.$$

Démontrer que $F : A \mapsto F_A$ est un morphisme de groupes de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\text{Aut}(\mathbb{E})$ c'est à dire vérifie pour tout $(A, B) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$:

$$F(AB) = F(B) \circ F(A).$$

On note $\text{Int}(\mathbb{E})$ l'image de F : c'est l'ensemble des automorphismes intérieurs de $\mathbb{E}$.

3. Représentation des éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{E})$.

a) Soient $A = [a_{i,j}]$ et $B = [b_{i,j}]$ dans $\mathbb{E}$. On note $C = A \otimes B$ la matrice :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & \cdots & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & \cdots & \cdots & a_{2,n}B \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots & \cdots & a_{n,n}B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{K}).$$

On considère encore l'application $f_{A,B} : M \mapsto AMB$ de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$.

- i) On note $\beta = (E_{1,1}, \dots, E_{1,n}, \dots, E_{n,n})$ (ordre lexicographique). Identifier la matrice de $f_{A,B}$ dans la base β .
- ii) Pour k, l, m, p, i, j dans $\{1, \dots, n\}$, calculer $f_{E_{k,l}, E_{m,p}}(E_{i,j})$.
- iii) On note V l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{K} \{1, \dots, n\}^4$ dans $\mathbb{K}$. Pour ξ dans V , on pose :

$$L_\xi = \sum_{(k,l,m,p) \in \{1, \dots, n\}^4} \xi(k, l, m, p) f_{E_{k,l}, E_{m,p}}.$$

En étudiant l'application $\xi \mapsto L_\xi$, démontrer que tout élément ψ de $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ s'écrit sous la forme :

$$\psi = \sum_{i=1}^p f_{A_i, B_i},$$

où $A_1, \dots, A_p, B_1, \dots, B_p$ sont dans $\mathbb{E}$ (on parle de représentation de ψ de longueur p).

- b) Soit ψ dans $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ et $\sum_{i=1}^p f_{A_i, B_i}$ une représentation de ψ de longueur minimale. Démontrer que les familles $(A_1, \dots, A_p)$ et $(B_1, \dots, B_p)$ sont libres.
 - c) Soit ψ dans $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ qui admet pour représentations $\sum_{i=1}^p f_{A_i, B_i}$ et $\sum_{i=1}^p f_{A_i, B'_i}$, avec $(A_1, \dots, A_p)$ libre. Démontrer que pour tout i dans $\{1, \dots, p\}$ on a : $B_i = B'_i$.
4. **Egalité $\text{Aut}(\mathbb{E}) = \text{Int}(\mathbb{E})$.** Soit ψ dans $\text{Aut}(\mathbb{E})$ et $\sum_{i=1}^p f_{A_i, B_i}$ une représentation de ψ de longueur minimale.
- a) Démontrer que pour tout M dans $\mathbb{E}$ et (i, j) dans $\{1, \dots, p\}$, on a : $A_i M = \psi(M) A_i$ et $B_j \psi(M) = M B_j$.
 - b) Démontrer que chaque $A_i B_j$ est une matrice scalaire et que l'un des $A_i B_i$ est non nul.
 - c) Démontrer que $\text{Aut}(\mathbb{E}) = \text{Int}(\mathbb{E})$.