Composition n° 3

Le samedi 30 novembre 2024

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*La **présentation** de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.*

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Exercice

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

et de calculer sa valeur. On considère la fonction $f : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{e}^{-xt}.$$

On définit également la fonction $u : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad u(x,t) = -\frac{x\sin(t) + \cos(t)}{1 + x^2} \mathrm{e}^{-xt}.$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité $|\sin(t)| \leqslant |t|$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Partie I - Préliminaires

1. Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
2. En utilisant par exemple une intégration par parties, montrer que l'intégrale I est convergente si et seulement si l'intégrale :
$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$
est convergente. En déduire que l'intégrale I converge.
3. Soit $x \geqslant 0$. Montrer que $t \mapsto u(x,t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}$ sur $]0, +\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t) dt.$$

Partie II - Calcul de F sur $]0, +\infty[$

4. Montrer que $|F(x)| \leqslant \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
5. Démontrer que la fonction F est continue sur $]0, +\infty[$.
6. Démontrer que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
Conclure que : $\forall x > 0, \quad F(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(x).$

Partie III - Conclusion

On considère les fonctions $F_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $F_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in [0,1], \quad F_1(x) = \int_0^1 f(x,t)dt \ \text{ et } \ F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x,t)dt.$$

7. Montrer que la fonction F_1 est continue sur $[0,1]$.
8. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et que :

$$F_2(x) = \frac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}\mathrm{e}^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt.$$

9. Montrer que la fonction F_2 est continue sur $[0,1]$.
10. En déduire que la fonction F est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale I.

Problème

Dans ce problème $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement :

Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors
il existe un unique couple (D,N) de matrices de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant les quatre propriétés :
(1) $A = D + N$;
(2) D est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$ (pas nécessairement diagonale) ;
(3) N est nilpotente ;
(4) $DN = ND$.
De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$.
Le couple (D,N) s'appelle la décomposition de Dunford de A.

Partie I - Quelques exemples

1. a) Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque la matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente.
   b) Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Dunford.
   c) Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$?
2. Donner un exemple d'une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford dans $M_2(\mathbb{R})$.
3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix}3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{pmatrix}$.
   Calculer son polynôme caractéristique χ_A, puis donner le couple (D,N) de la décomposition de Dunford de A (on utilisera le fait que $\chi_A = \chi_D$).
4. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.
   a) Justifier que le polynôme $X(X-1)$ est annulateur de la matrice A^2.
   b) Démontrer que le couple (D,N) de la décomposition de Dunford de la matrice A est donné par : $D = A^2$ et $N = A - A^2$.

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.
On notera Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

6. a) La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?
   b) Démontrer qu'on a la somme directe : $\mathbb{R}^3 = \ker(u - \mathrm{Id}) \oplus \ker(u - 2\mathrm{Id})^2$.
7. a) Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que :
   $\ker(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{vect}\{e_1\},\ \ker(u - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{vect}\{e_2\},\ \ker(u - 2\mathrm{Id})^2 = \mathrm{vect}\{e_2, e_3\}$.
   b) Écrire la matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
8. Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice B et en déduire le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice A.
9. Trouver a, b et c réels tels que $\dfrac{a}{X-1} + \dfrac{bX+c}{(X-2)^2} = \dfrac{1}{(X-1)(X-2)^2}$ et en déduire deux polynômes U et V tels que :

$$(X-1)U(X) + (X-2)^2 V(X) = 1 \text{ avec } \deg(U) < 2 \text{ et } \deg(V) < 1.$$

10. On pose les endomorphismes : $p = V(u) \circ (u - 2\mathrm{Id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \mathrm{Id})$.
    a) Calculer $p(x) + q(x)$ pour tout x vecteur de $\mathbb{R}^3$.
    b) Démontrer que p est le projecteur sur $\ker(u - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\ker(u - 2\mathrm{Id})^2$ et q est le projecteur sur $\ker(u - 2\mathrm{Id})^2$ parallèlement à $\ker(u - \mathrm{Id})$.
11. On pose $d = p + 2q$.
    a) Écrire la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ (de la question 7).
    b) Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice A en exprimant D et N comme polynômes de la matrice A (sous forme développée).

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

12. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
    Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, $E_{\lambda_i}(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i.
    a) Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.
    Pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, on pourra noter v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.
    b) En déduire qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v.
13. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Démontrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable.
14. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent, démontrer que la matrice $A - B$ est nilpotente.
15. Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui sont à la fois diagonalisables et nilpotentes.
16. Dans cette question, on admet, pour toute matrice carrée A de $M_n(\mathbb{K})$ à polynôme caractéristique scindé, l'existence d'un couple (D, N) vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4) et tel que D et N soient des polynômes en A.
    Etablir l'unicité du couple (D, N) dans la décomposition de Dunford.

Partie IV - Non continuité de l'application $A \mapsto D$

18. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui sont diagonalisables.
    a) $\mathcal{D}$ est-il un espace vectoriel ?
    b) Si P est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{C})$, justifier que l'application de $M_n(\mathbb{C})$ vers $M_n(\mathbb{C})$, $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue.
19. Démontrer que $\mathcal{D}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$ c'est à dire que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une suite (M_n) dans $\mathcal{D}$ telle que $M_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} M$.
20. Si (D, N) est le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A, on note φ l'application de $M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{D}$ qui à la matrice A associe la matrice D.
    Justifier que φ est l'application identité sur $\mathcal{D}$ et en déduire que l'application φ n'est pas continue.

FIN DE L'ÉNONCÉ
