Composition n° 2, une correction

Exercice 1 - Les opérateurs de translation et de différence

Partie I - L'opérateur de translation

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$, de degré $d = \deg(P)$ (i.e. $a_d \neq 0$).
Alors, $\tau(P)$ est de la forme :

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{d} a_k (X+1)^k = a_d X^d + (d a_d + a_{d-1}) X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k$$

Comme $a_d \neq 0$: $\deg(\tau(P)) = \deg(P)$ et $\operatorname{cd}(\tau(P)) = \operatorname{cd}(P)$

2. Notons que $\tau^0(P) = P$et que si $\tau^k(P)(X) = P(X+k)$ pour un certain$k \in \mathbb{N}$, alors $\tau^{k+1}(P)(X) = \tau(\tau^k(P))(X) = P((X+k)+1) = P(X+(k+1))$.
Ainsi on peut conclure par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \tau(P)(X) = P(X+k)$$

3. D'après la formule du binôme de Newton (changement d'indice $i = h+1$),

$$\forall j \in \mathbb{N}_{n+1},\ \tau(P_j)(X) = (X+1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} X^h = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} P_i$$

M est donc triangulaire supérieure et les coefficients de M vérifient donc :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ (M)_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. • La matrice M est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres se trouvent sur la diagonale. Il s'agit des nombres $\binom{j-1}{j-1} = 1$.

• Si M était diagonalisable, elle serait alors semblable à la matrice unité, et donc elle serait égale à la matrice unité.

Conclusion. La matrice M (donc τ) ne sont pas diagonalisables.

5. • Comme 0 n'est pas valeur propre de τ, τ est injectif, donc bijectif comme endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

• Puis on considère $\overline{\tau} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P(X) \mapsto P(X-1)$. C'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Il vérifie de plus : $\tau \circ \overline{\tau} = \overline{\tau} \circ \tau = \mathrm{id}$.

Conclusion. $\tau^{-1}(P)(X) = P(X-1)$.

• Comme pour la question 2, on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\tau^{-k}(P)(X) = P(X-k)$: la formule est toujours vraie.

6. Avec l'expression de τ^{-1}, on applique la même méthode qu'à la question 2 et on obtient :

$$\forall j \in \mathbb{N}_{n+1},\ \tau^{-1}(P_j)(X) = (X-1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} (-1)^{j-1-h} X^h = \sum_{i=1}^{j} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} P_i$$

Ainsi : $\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ (M^{-1})_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1} & \text{pour} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

7. Si Q est une matrice qui convient, la $k+1$-*ième* ligne du calcul $V = Q \times U$ donne

$$v_k = \sum_{j=1}^{n+1} Q_{k+1,j} u_{j-1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j$$

Ainsi, pour trouver une matrice convenable, il suffit d'identifier (après changement d'indice) : $Q_{k,j} = \begin{cases} \binom{k-1}{j-1} & \text{pour} \quad j \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Conclusion. La matrice $Q = M^\top$ convient.

8. Comme la matrice M est inversible, $Q = M^T$ l'est également et $Q^{-1} = (M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$.
Puis on a $V = Q \times U$ si et seulement si $U = Q^{-1} \times V = (M^{-1})^T \times V$.
La $k+1$-*ième* ligne de ce denier calcul donne alors

$$u_k = \sum_{j=1}^{n+1} \left((M^{-1})^T\right)_{k+1,j} v_{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1} \left((M^{-1})\right)_{j,k+1} v_{j-1} = \sum_{j=0}^{n} \left((M^{-1})\right)_{j+1,k+1} v_j$$

ce qui donne la formule d'inversion

$$u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j$$

9. • On a alors $v_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^j = (\lambda+1)^k$.

   • On vérifie sans problème la formule

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\lambda+1)^j (-1)^{k-j} = ((\lambda+1)-1)^k = u_k.$$

Partie II - L'opérateur de différence

1. Avec les mêmes notations qu'à la question 1 , avec P *non constant* on a :

$$\delta(P)(X) = a_d X^d + (d a_d + a_{d-1}) X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k - a_d X^d - a_{d-1} X^{d-1} - \sum_{k=0}^{d-2} a_k X^k = d a_d X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} c_k X^k$$

Comme $a_d \neq 0$:

$$\boxed{\text{si } P\text{, non constant, } \deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1 \text{ et } \mathrm{cd}(\delta(P)) = \deg(P) \times \mathrm{cd}(P)}$$

2. • D'après la question précédente, si P n'est pas constant, $\deg(P) \geqslant 1$ et $\deg(\delta(P)) \geqslant 0$, donc $\delta(P)$ n'est pas nul. Ainsi, si $\delta(P) = 0$, alors P est constant.
Réciproquement, si P est constant, le calcul (simple) donne $\delta(P) = 0$.
Il en résulte que $\ker(\delta) = \mathbb{R}_0[X]$.

   • La question précédente montre aussi que $\mathrm{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Or d'après le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Im}(\delta)) = n + 1 - \dim(\ker(\delta)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$.

   Conclusion. On a : $\mathrm{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

3. • On suppose que pour un certain $j < n$ on a $\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$. Ainsi on a les équivalences :

$$P \in \ker(\delta^{j+1}) \Leftrightarrow \delta^{j+1}(P) = 0 = \delta^j(\delta(P)) \Leftrightarrow \delta(P) \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$$

   De là :

$$P \in \ker(\delta^{j+1}) \Leftrightarrow \deg(P) = \deg(\delta(P)) + 1 \leqslant (j-1) + 1 = j \Leftrightarrow P \in \mathbb{R}_j[X]$$

   On peut conclure par récurrence que : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$.

   • Si $P \in \mathrm{Im}(\delta^j)$, alors il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \delta^j(Q)$.
Or une récurrence simple (suite arithmétique) montre que $\deg P = \deg(Q) - j$, donc $\deg(P) \leqslant n - j$.
Par conséquent, $P \in \mathbb{R}_{n-j}[X]$, et donc $\mathrm{Im}(\delta^j) \subset \mathbb{R}_{n-j}[X]$.
Le théorème du rang assure par ailleurs que ces deux espaces ont même dimension, ce qui permet de conclure que : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$.

4. Notons Δ, la matrice de δ dans la base (P_ℓ).
Par construction de $\delta = \tau - \mathrm{id}$, on a $\Delta = M - I_{n+1}$.
Puis pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme M commute avec I_{n+1} :

$$\Delta^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} M^j.$$

   Ce qui permet d'affirmer, en revenant aux endomorphismes :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \delta^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j$$

5. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \ker(\delta^n)$. On a $\delta^n(P) = 0$ donc :

$$0(X) = [\delta^n(P)](X) = [\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(P)](X) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} [\tau^j(P)(X)] = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j)$$

   Et en particulier en évaluant en 0, il vient :

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0.$$

6. (a) On a : $u \circ \delta^2 = u \circ [u^2 \circ u^2] = u^5 = [u^2 \circ u^2] \circ u = \delta^2 \circ u$.
Ainsi u et δ^2 commutent.

   (b) Soit $P \in \mathbb{R}_1[X] = \ker \delta^2$, alors

$$\delta^2(u(P)) = u(\delta^2(P)) = u(0) = 0$$

   Donc $u(P) \in \ker(\delta^2) = \mathbb{R}_1[X]$.
Par conséquent $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u.

(c) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = A \times A^2 = A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $a = d$ et $c = 0$, ainsi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, puis $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$, et ainsi nécessairement $a = 0$, puis $2ab = 0$; ce qui est contradictoire avec $ab = 1$.

Conclusion. Aucune matrice A ne vérifie $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) Puisque $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u, notons $\tilde{u} : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_1[X], P \mapsto u(P)$ l'endomorphisme induit.
Considérons alors A, la matrice de $\tilde{u}$ dans la base (P_1, P_2) de $\mathbb{R}_1[X]$.
Alors A^2 est égale à la matrice de δ sur $\mathbf{R}_1[X]$ c'est à dire $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Or d'après la question précédente, ceci est impossible.

Conclusion. Il n'existe pas d'endomorphisme u de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $u^2 = \delta$

7. (a) On a vu (question 3) que $\deg(\delta^i(P)) = \deg(P) - i = d - i$.
Ainsi, la famille $(P, \delta(P), \dots \delta^d(P))$ est une famille de degré échelonné (de d à 0). C'est une famille libre et $\mathrm{vect}(P, \delta(P), \dots \delta^d(P)) = \mathbb{R}_d[X]$.

(b) Soit V stable par δ.
Si $P \in V$, alors $\delta^i(P) \in V$ et donc $\mathbb{R}_{\deg(P)}[X] = \mathrm{vect}(P, \delta(P), \dots \delta^n(P)) \subset V$.
Il reste à montrer l'égalité, il faut prendre le polynôme en degré maximum...
V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Notons $d = \dim(V) - 1$.
Notons $(e_0, \dots e_d)$ une base de V. Nécessairement, l'un des e_i est un polynôme de degré supérieur ou égal à d (sinon, on aurait une famille libre de $d+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_d[X]$, ce qui est impossible).
Il existe donc P dans V de degré $r \geqslant d$.
Supposons un instant que $\deg P = r > d$, alors d'après la remarque précédente, $\mathbb{R}_r[X] = \mathrm{vect}(P, \delta(P), \dots \delta^r(P)) \subset V$ et V ne peut être de dimension $d+1$.
Ainsi il existe P de degré d dans V et $\mathbb{R}_d[X] \subset V$ et par égalité des dimensions : il existe $d \in [\![0, n]\!]$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.

Exercice 2 - Des intégrales impropres...

Partie 1 - Les intégrales de Bertrand

Cela a été traité en TD...

Partie 2 - Autour de la fonction Gamma

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f_x : t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

• On a $t^2 f_x(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Ainsi $f_x(t) \underset{t \to +\infty}{=} o(1/t^2)$. Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, il en va de même de f_x, par domination.

• On a $f(t) \underset{t \to 0}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$. Ainsi les fonctions f et $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1-x}}$ sont simultanément intégrables en 0. Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable en 0 si et seulement si $1 - x < 1$ (Riemann), on peut conclure que f_x est intégrable en 0 si et seulement si $x > 0$.

Ainsi f_x est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $x > 0$. Comme $f_x \geqslant 0$, l'intégrale impropre $\Gamma(x)$ converge si et seulement si $x > 0$.

Conclusion. Le domaine de définition de Γ est $\mathcal{D} =]0, +\infty[$.

5. Soit $x \in \mathcal{D}$.
<u>**Version « BB ».**</u> Soit $B > A > 0$. Une intégration par partie donne :

$$\begin{aligned}\int_A^B t^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= \left\{-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_A^B + x\int_A^B t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= -B^x\mathrm{e}^{-B} + A^x\mathrm{e}^{-A} + x\int_A^B t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Mais $\lim\limits_{A\to 0^+} A^x\mathrm{e}^{-A} = 0$, $\lim\limits_{B\to 0^+} B^x\mathrm{e}^{-B} = 0$, donc en faisant tendre A vers 0 et B vers $+\infty$, on obtient :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

• <u>**Version « grand ».**</u> Un intégration par parties <u>formelle</u> donne :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left\{-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + x\underbrace{\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}_{=\Gamma(x)}.$$

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} t^x\mathrm{e}^{-t} = 0$, à posteriori l'intégration par parties est correcte, et on a : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

6. • Soit $x \in \mathcal{D}$. Si pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\Gamma(x+n) = \left(\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k)\right)\Gamma(x)$ alors $\Gamma(x+n+1) = (x+n)\Gamma(x+n) = \left(\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)\right)\Gamma(x)$. Comme on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ on peut conclure par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma(x+n) = \left(\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)\right)\Gamma(x).$$

• Il vient alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = \Gamma(1+n-1)\left(\prod\limits_{k=0}^{n-1} k\right)\Gamma(1) = (n-1)!$.

7. • Via le changement de variable $u = t^2$ qui est C^1 bijectif croissant de $]0, +\infty[$ sur lui même, les intégrales impropres $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}$ ont même nature et même valeur si convergence. Mais on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ donc l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge de valeur $\dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

• Via le changement de variable $u = t^4$ qui est C^1 bijectif croissant de $]0, +\infty[$ sur lui même, les intégrales impropres $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^4}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{4u^{3/4}}$ ont même nature et même valeur si convergence. Mais on a :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{4u^{3/4}} = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right),$$

donc l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^4}\,\mathrm{d}t$ converge de valeur $\dfrac{1}{4}\Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

Partie 3 - Une intégrale à paramètre

8. La fonction $\phi : u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $\phi(u) \underset{0^+}{\sim} u^{-1/2}$ et $\phi(u) = \mathrm{o}\left(u^2\right)$ en $+\infty$; donc K converge.
9.
   - La fonction $f_x : u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x \geqslant 0$;
   - pour $x = 0$, $f_0(u) \underset{0^+}{\sim} u^{-3/2}$ d'intégrale divergente ;
   - pour $x > 0$, $f_x(u) \underset{0^+}{\sim} \frac{\phi(u)}{x}$ d'intégrale convergente, $f_x(u) = \mathrm{o}\left(u^2\right)$ en $+\infty$, donc $F(x)$ converge.

   Ainsi et $D = \mathbb{R}_+^*$.
10. Pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f_x(u)$ décroissante, donc F aussi.
11. La fonction G est dérivable sur D et pour tout $x \in D$, d'après la relation admise,

$$G'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2\sqrt{x}}\,F(x) - \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F(x) + \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\left[x\,F'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)F(x)\right] = -K\,\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$$

   Les fonctions G et $H : x \mapsto -K \displaystyle\int_0^x \phi(u)\,\mathrm{d}u$ (bien définie car ϕ a une intégrale convergente en 0^+) ont la même dérivée sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc y diffèrent d'une constante.
12. La fonction F est décroissante, positive et a une limite finie en $+\infty$, donc $G(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées.

   D'autre part, par convergence de K, $G(x) = C - K\displaystyle\int_0^x \phi(u)\,\mathrm{d}u \xrightarrow[x\to+\infty]{} C - K^2$; d'où $C = K^2$.
13. (a) Le changement de variables $t \mapsto \sqrt{t} = u$ est de classe C^1 bijectif de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. L'intégrale demandée et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \pi$ sont de même nature et égales. Donc $J = \pi$.

   (b) Par changement de variables $u \mapsto u/x = t$ (pour $x > 0$) on obtient

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t$$

   donc l'intégrale converge.

   (c) Soit $\epsilon > 0$. Par convergence de J, il existe $A > 0$ tel que $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,(t+1)} \leqslant \frac{\epsilon}{2}$.

   Par continuité de exp en 0,

$$\exists \eta > 0\,,\ \forall u \in \mathbb{R}\,,\quad 0 \leqslant u \leqslant \eta \Rightarrow \left|\mathrm{e}^{-u} - 1\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2\pi}$$

   Alors, pour tout $x \in [0, \eta/A]$,

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t \;-\; J\right| \leqslant \int_0^A \frac{\left|\mathrm{e}^{-tx} - 1\right|}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t + \int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,(t+1)} \leqslant \frac{\epsilon}{2\pi}\,J + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

   d'où la différence des intégrales tend vers 0 quand x tend vers 0^+.

   (d) D'après la question 13c

$$G(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} J$$

   D'autre part, $\lim\limits_{0^+} G = C$ car l'intégrale de ϕ converge en 0 ; d'où $C = \pi$.
14. D'après la question 12, $K = \sqrt{C} = \sqrt{\pi}$.

Exercice 3 - Des normes et des applications linéaires continues

Partie I - Applications linéaires

1. Fait en cours.

2. Soit $f \in E$. On a : $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{|f(t)|}_{\leqslant \|f\|_\infty} \, \mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty$ et ainsi $M = 1$ convient.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère l'élément de E défini par $f_n(t) = t^n$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\|f\|_1 = \dfrac{1}{n+1}$ et $\|f_n\|_\infty = 1$. S'il existe une constante $\beta > 0$ telle que $\| \ \|_\infty \leqslant \beta \| \ \|_1$ alors ou aura pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leqslant \dfrac{\beta}{n+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui est profondément stupide.

   Conclusion. Les normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

4. On considère l'application linéaire $\Phi : E \to \mathbb{R}$ définie par : $\Phi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t$. L'application Φ est-elle continue de $(E, \| \ \|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, | \ |)$?
   Soit $f \in E$. On a :
   $$|\Phi(f)| \leqslant \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty .$$
   D'après la caractérisation des applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés, φ est continue.

5. (a) En considérant la suite de fonctions (f_n) de E où, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto \sqrt{n} t^n$, démontrer que Ψ n'est pas continue de $(E, \| \ \|_1)$ dans $(\mathbb{R}, | \ |)$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
   $$\|f_n\|_1 = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
   et ainsi $f_n \xrightarrow{\| \ \|_1} 0$.
   Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a également :
   $$\psi(f_n) = \sqrt{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
   Cela met en défaut la caractérisation séquentielle de la continuité en 0 : ψ n'est pas continue.

   (b) Pour tout f dans E on a :
   $$|\Psi(f)| = |f(1)| \leqslant \|f\|_\infty ,$$
   donc Ψ est continue de $(E, \| \ \|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, | \ |)$.

Partie II - Une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. • Tout d'abord $\| \ \| : A = [a_{i,j}] \mapsto \displaystyle\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right)$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

   • Puis soient $A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{i,j}]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

   ∗ Si $\|A\| = 0$ alors $\displaystyle\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) = 0$ donc pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on a $\displaystyle\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = 0$ et ainsi pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ on a $|a_{i,j}| = 0$ ce qui signifie que $A = 0$.

$*$ $\|\lambda A\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|\lambda a_{i,j}|\right) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|\lambda|\,|a_{i,j}|\right) = \|\lambda\|\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right) = \|\lambda\|\,\|A\|$.

$*$ On a $A+B=[a_{i,j}+b_{i,j}]$ donc pour tout i dans $\{1,\ldots,n\}$ on a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}+b_{i,j}| &\leqslant \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|+\sum_{j=1}^{n}|b_{i,j}| \leqslant \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}| + \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{n}|b_{i,j}|\right)\\ &\leqslant \underbrace{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)}_{=\|A\|} + \underbrace{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{n}|b_{i,j}|\right)}_{\|B\|}\end{aligned}$$

donc $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}+b_{i,j}|\right) \leqslant \|A\|+\|B\|$ i.e. $\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$.

7. (a) Soient $A=[a_{i,j}]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X=(x_1,\ldots,x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. On a alors :

$$AX = \left(\sum_{j=1}^{n}a_{1,j}x_j,\ldots,\sum_{j=1}^{n}a_{n,j}x_j\right)$$

et ainsi $\|AX\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j\right|$.
Mais pour tout i dans $\{1,\ldots,n\}$ on a :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j\right| &\leqslant \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}x_j| = \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\,|x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\,\|X\|_\infty = \|X\|_\infty\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\\ &\leqslant \|X\|_\infty\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}| = \|X\|_\infty\,\|A\|\end{aligned}$$

Il en résulte que $\|AX\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j\right| \leqslant \|X\|_\infty\,\|A\|$ comme souhaité.

(b) • Soit i_0 dans $\{1,\ldots,n\}$ tel que $\|A\| = \sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i_0,j}|$. On considère alors par exemple le vecteur $X_0=(x_1,\ldots,x_n)$ tel que pour j dans $\{1,\ldots,n\}$ on ait :

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{i_0,j}\geqslant 0\\ -1 & \text{si } a_{i_0,j}\geqslant 0\end{cases}$$

de sorte que pour tout j dans $\{1,\ldots,n\}$ on ait $a_{i_0,j}x_j=|a_{i_0,j}|$. On a ainsi $\|X_0\|_\infty=1$ et :

$$AX_0 = \left(\sum_{j=1}^{n}a_{1,j}x_j,\ldots,\sum_{j=1}^{n}a_{n,j}x_j\right)$$

Mais pour tout $(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2$ on a $|a_{i,j}x_j|=|a_{i,j}|$ donc $\|AX_0\|_\infty=\|A\|$ ce qui implique :

$$\boxed{\|AX_0\|_\infty = \|A\|\;\|X_0\|_\infty}$$

• Pour tout X dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on a $\|AX\|_\infty \leqslant \|A\| \; \|X\|_\infty$ donc $\|A\| \geqslant \dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$ et ainsi on a correctement :

$$\|A\| \geqslant \sup_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$$

Mais on vient de voir qu'il existe X_0 dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\|AX_0\|_\infty = \|A\| \; \|X_0\|_\infty$ i.e. $\|A\| = \dfrac{\|AX_0\|_\infty}{\|X_0\|_\infty}$ donc on a bien :

$$\boxed{\|A\| = \sup_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}}$$

(c) Soient $A = [a_{i,j}]$ et $B = [b_{i,j}]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $C = AB = [c_{i,j}]$. Pour tout (i,j) dans $\{1, \dots, n\}^2$ on a :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

donc pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$ on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |c_{i,j}| &= \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \, |b_{k,j}| = \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \sum_{j=1}^{n} |b_{k,j}| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_{k,j}| \right) = \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \, \|B\| = \|B\| \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \\
&\leqslant \|B\| \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| = \|B\| \; \|A\|
\end{aligned}$$

Il en résulte que $\|AB\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |c_{i,j}| \right) \leqslant \|B\| \; \|A\|$.

8. (a) • Supposons que la suite (A_m) converge vers A. On a donc $\|A_m - A\| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Mais pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}(m) - a_{i,j}| \leqslant \|A_m - A\|$ donc (par sandwich)

$$\lim_{m \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}(m) - a_{i,j}| = 0$$

et ainsi, puisque tous les termes de ces sommes sont positifs, on a pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$:

$$\lim_{m \to +\infty} |a_{i,j}(m) - a_{i,j}| = 0 \quad \text{i.e.} \quad \boxed{\lim_{m \to +\infty} a_{i,j}(m) = a_{i,j}}$$

Commentaire. On peut tout aussi bien utiliser l'équivalence de $\| \;\|$ avec $\| \;\|_i nfty$.

• Réciproquement supposons que pour tout (i,j) dans $\{1, \dots, n\}^2$ on ait : $\lim\limits_{m \to +\infty} a_{i,j}(m) = a_{i,j}$.
Par somme finie :

$$\lim_{m \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}(m) - a_{i,j}| = 0.$$

Mais $\|A_m - A\| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}(m) - a_{i,j}|$ donc, par sandwich, $\lim\limits_{m \to +\infty} \|A_m - A\| = 0$.

(b) On a :

$$\|A_mB_m - AB\| \leqslant \|A_mB_m - AB_m\| + \|AB_m - AB\| \leqslant \|B_m\|\,\|A_m - A\| + \|A\|\,\|B_m - B\|$$

Mais $\|B_m\| \leqslant \|B_m - B\| + \|B\|$ et la suite $(\|B_m - B\|)$ est bornée (puisque convergente) donc $(\|B_m\|)$ est bornée ; il existe ainsi C constante réel telle que :

$$\|A_mB_m - AB\| \leqslant C\,\|A_m - A\| + \|A\|\,\|B_m - B\| \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N}$$

Enfin $\|A_m - A\| \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\|B_m - B\| \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par sandwich :

$$\boxed{\|A_mB_m - AB\| \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

9. (a) On obtient de suite par récurrence $\|A^m\| \leqslant \|A\|^m$ et ainsi, puisque $\|A\| < 1$, il vient par sandwich

$$\exists \lim_{m\to+\infty} \|A\|^m = 0.$$

(b) • Si λ est une valeur propre de A alors on dispose de X vecteur non nul dans $\mathbb{R}^n$ tel que $AX = \lambda X$. Or $\|AX\|_\infty = \|\lambda X\|_\infty = |\lambda|\,\|X\|_\infty$ et on a vu que $\|AX\|_\infty \leqslant \|A\|\,\|X\|_\infty$ donc il vient :

$$\lambda\,\|X\|_\infty \leqslant \underbrace{\|A\|}_{<1}\,\|X\|_\infty < \|X\|_\infty$$

et comme $\|X\|_\infty > 0$ il reste $\boxed{|\lambda| < 1}$.

• Ainsi -1 et 1 ne sont pas valeurs propres de A ce qui signifie exactement que les matrices $I - A$ et $I + A$ sont inversibles.

(c) Si m est un entier naturel on a $(I - A)\left(\sum_{k=0}^{m} A^k\right) = I - A^{m+1}$ et on sait que $(I - A)$ est inversible donc il vient : $\sum_{k=0}^{m} A^k = (I - A^{m+1})(I - A)^{-1}$.

Mais $A^{m+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $(I - A^{m+1})(I - A)^{-1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} (I - A)^{-1}$ et ainsi : la suite $\left(\sum_{k=0}^{m} A^k\right)$ converge vers $(I - A)^{-1}$.

NB. Pour $n = 1$ on doit retrouver le résultat bien connu des séries géométriques...