Composition n° 2

Le samedi 18 octobre 2024

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*La **présentation** de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées.*
Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.
Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Exercice 1 - Les opérateurs de translation et de différence

Dans tout l'exercice, $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.

Pour $a < b$ dans $\mathbb{Z}$, on note $\{a, \dots, b\}$ l'ensemble $[a, b] \cap \mathbb{Z}$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k le polynôme X^{k-1}. On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ dont la famille $(P_k)_{k\in\{1,\dots,n+1\}}$ est une base. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P et, lorsque P est non nul, $\mathrm{cd}(P)$ désigne le coefficient dominant de P, c'est-à-dire le coefficient du monôme $X^{\deg(P)}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, \dots, k\}$, le coefficient binomial $\binom{k}{j}$ vaut $\dfrac{k!}{j!(k-j)!}$.

Pour un ensemble E et $f : E \to E$, on définit l'application $f^k : E \to E$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \text{ et } f^{k+1} = f \circ f^k$$

Si f est bijective, on note f^{-1} la réciproque de f et pour $k \in \mathbb{N}$, on note $f^{-k} = (f^{-1})^k$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille p.

Partie I - L'opérateur de translation

L'opérateur de translation est l'endomorphisme τ de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par :

$$\tau : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) \end{array}$$

1. Pour un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\tau(P))$ et $\mathrm{cd}(\tau(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $\tau^k(P)$ en fonction de P.
3. Donner la matrice $M = (M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ de τ dans la base $(P_k)_{1\leqslant k\leqslant n+1}$. On exprimera les coefficients $M_{i,j}$ en fonction de i et j.
4. Préciser l'ensemble des valeurs propres de M. La matrice M est-elle diagonalisable, i.e. semblable à une matrice diagonale ?
5. L'application τ est-elle bijective ? Si oui, préciser τ^{-1}. L'expression de τ^j trouvée à la question 2 pour $j \in \mathbb{N}$ est-elle valable pour $j \in \mathbb{Z}$?
6. Que vaut M^{-1} ? Exprimer les coefficients $(M^{-1})_{i,j}$ en fonction de i et j.
7. On se donne une suite réelle $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et on définit, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j \tag{1}$$

Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

8. En déduire la formule d'inversion : pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j \tag{2}$$

9. On considère un réel λ et la suite $(u_k = \lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Quelle est la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la formule (1) ? Vérifier alors la formule (2).

Partie II - L'opérateur de différence

L'opérateur de différence est l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\delta = \tau - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$:

$$\begin{array}{rccc} \delta : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

1. Pour un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\delta(P))$ et $\mathrm{cd}(\delta(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.
2. En déduire le noyau $\ker(\delta)$ et $\mathrm{Im}\,(\delta)$ de l'endomorphisme δ.
3. Plus généralement, pour $j \in \{1, \dots, n\}$, montrer les égalités suivantes :

$$\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\,(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \tag{3}$$

4. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\delta^k(P)$ en fonction des $\tau^j(P)$ pour $j \in \{0, \dots, n\}$.
5. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0 \tag{4}$$

6. Dans cette question, on veut montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ telle que $u \circ u = \delta$. On suppose, par l'absurde, qu'une telle application u existe.
   (a) Montrer que u et δ^2 commutent.
   (b) En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par l'application u.
   (c) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (d) Conclure.
7. Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par l'application δ.
   (a) Pour P polynôme non nul de degré $d \leqslant n$, montrer que la famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?
   (b) En déduire que si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, il existe un entier $d \in \{0, \dots, n\}$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.

Exercice 2 - Des intégrales impropres...

Partie 1 - Les intégrales de Bertrand

Soient α et β réels. On considère l'intégrale impropre : $I = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$.

1. Démontrer que si $\alpha > 1$ l'intégrale impropre I est convergente.
2. Démontrer que si $\alpha < 1$ l'intégrale impropre I est divergente.
3. Qu'en est-il pour $\alpha = 1$?

Partie 2 - Autour de la fonction Gamma

Pour x réel, on pose lorsque cela a un sens : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$.

4. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_\Gamma$ de la fonction Γ ?
5. Pour $x \in \mathcal{D}$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et $\Gamma(x)$.
6. Démontrer que pour tout x dans D_Γ et tout n dans $\mathbb{N}^*$ on a :

$$\Gamma(x+n) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} (x+k) \right) \Gamma(x)$$

   En déduire la valeur de $\Gamma(n)$.

7. A l'aide de changements de variable, démontrer l'existence des deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^4}\, \mathrm{d}t$ et les exprimer à l'aide de Γ.

Partie 3 - Une intégrale à paramètre

Soit la fonction d'une variable réelle $\phi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$.

8. Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi(u)\, \mathrm{d}u$, notée K.
9. Déterminer l'ensemble D des réels $x \geqslant 0$ pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)}\, \mathrm{d}u$ converge.

   On note alors $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)}\, \mathrm{d}u$.

10. Déterminer le sens de variation de F sur D (on pourra comparer deux images).

On admet que la fonction F est dérivable sur D et qu'elle vérifie

$$\forall x \in D\,, \qquad x\,F'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) F(x) = -K\,.$$

Pour tout $x \in D$, on pose $G(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F(x)$.

11. En dérivant la fonction $H : x \mapsto G(x) - K \displaystyle\int_0^x \phi(u)\, \mathrm{d}u$, démontrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in D\,, \qquad G(x) = C - K \int_0^x \phi(u)\, \mathrm{d}u\,.$$

12. Déterminer la limite de G en $+\infty$, et en déduire une relation entre C et K.
13. (a) Prouver la convergence et calculer l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,(t+1)}\, \mathrm{d}t\,.$$

   (on pourra utiliser le changement de variable $u : t \to \sqrt{t}$ après l'avoir justifié).

   (b) Soit $x \in D$. Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\, \mathrm{d}t$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left[\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\, \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,(t+1)}\, \mathrm{d}t \right] = 0$.

   (d) En déduire la limite de G en 0, puis la valeur de C.

14. En déduire la valeur de K.

Exercice 3 - Des normes et des applications linéaires continues

Partie I - Applications linéaires

On considère l'espace vectoriel $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$. Pour f dans E on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t.$$

On rappelle que $\| \ \|_\infty$ est une norme sur E.

1. Démontrer que $\| \ \|_1$ est une norme sur E.
2. Déterminer une constante $M > 0$ telle que $\| \ \|_1 \leqslant M \| \ \|_\infty$.
3. Les normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
4. On considère l'application linéaire $\Phi : E \to \mathbb{R}$ définie par : $\Phi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$. L'application Φ est-elle continue de $(E, \| \ \|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, | \ |)$?
5. On considère l'application linéaire $\Psi : E \to \mathbb{R}$ définie par : $\psi(f) = f(1)$.
   (a) En considérant la suite de fonctions (f_n) de E où, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto \sqrt{n}t^n$, démontrer que Ψ n'est pas continue de $(E, \| \ \|_1)$ dans $(\mathbb{R}, | \ |)$.
   (b) L'application Ψ est-elle continue de $(E, \| \ \|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, | \ |)$?

Partie II - Une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans cette partie n est un entier tel que $n \geqslant 2$. On notera I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on pose : $\|X\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$, ce qui définit une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

6. Démontrer que l'application qui à toute matrice $A = [a_{i,j}]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe le réel $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\right)$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on notera $\| \ \|$ dans la suite.
7. (a) Pour tout A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et X dans $\mathbb{R}^n$ établir que : $\|AX\|_\infty \leqslant \|A\| \ \|X\|_\infty$.
   (b) Démontrer qu'il existe une vecteur $X_0 \neq 0$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que :
   $$\|AX_0\|_\infty = \|A\| \ \|X_0\|_\infty$$
   En déduire que $\|A\| = \sup\limits_{X\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$.
   (c) Démontrer que pour tout couple (A, B) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ on a :
   $$\|AB\| \leqslant \|A\| \ \|B\|$$

Une définition. *On dit que la suite (A_m) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ converge vers une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ lorsque*

$$\lim_{m\to+\infty} \|A_m - A\| = 0$$

Pour la suite on écrit $A_m = [a_{i,j}(m)]$ et $A = [a_{i,j}]$.

8. (a) Démontrer que la suite (A_m) converge vers A si et seulement si pour tout (i, j) dans $\{1, \dots, n\}^2$ on a :
   $$\lim_{m\to+\infty} a_{i,j}(m) = a_{i,j}$$
   (b) Démontrer que si (A_m) converge vers A et (B_m) converge vers B alors la suite $(A_m B_m)$ converge vers AB.
9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|A\| < 1$.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{m\to+\infty} A^m$.
   (b) Démontrer que si λ est valeur propre de A alors $|\lambda| < 1$. En déduire que les matrices $I - A$ et $I + A$ sont inversibles.
   (c) Démontrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^m A^k\right)$ converge et exprimer sa limite en fonction de A.