

Composition n° 1, bis

Le samedi 21 septembre 2024

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

La **présentation** de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées.
Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Réduction de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

Dans tout le problème, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} et E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

On note $\mathcal{L}(E)$ le \mathbb{K} -espace vectoriel des endomorphismes de E et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le \mathbb{K} -espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans \mathbb{K} .

On note $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice, dans la base \mathcal{B} de E , de l'endomorphisme u de $\mathcal{L}(E)$.

La matrice transposée de toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée M^T .

On dit qu'un sous-ensemble \mathcal{A} de $\mathcal{L}(E)$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{L}(E)$ si \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, stable pour la composition, c'est-à-dire que $u \circ v$ appartient à \mathcal{A} quels que soient les éléments u et v de \mathcal{A} . (Remarquer qu'on ne demande pas que Id_E appartienne à \mathcal{A}).

On dit qu'une sous-algèbre \mathcal{A} de $\mathcal{L}(E)$ est *commutative* si pour tous u et v dans \mathcal{A} , $u \circ v = v \circ u$.

Une sous-algèbre \mathcal{A} de $\mathcal{L}(E)$ est dite *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe une base \mathcal{B} de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure) pour tout u de \mathcal{A} .

On dit qu'une partie \mathcal{A} de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel stable pour le produit matriciel. Elle est dite *commutative* si, pour toutes matrices A et B de \mathcal{A} , $AB = BA$. Une sous-algèbre \mathcal{A} de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute matrice M de \mathcal{A} , $P^{-1}MP$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure).

Si \mathcal{B} est une base de E , l'application $Mat_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une bijection qui envoie une sous-algèbre (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable) de $\mathcal{L}(E)$ sur une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable).

Un sous-espace vectoriel F de E est *strict* si F est différent de E .

On désigne par $S_n(\mathbb{K})$ (respectivement $A_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement antisymétriques). On désigne par $T_n(\mathbb{K})$ (respectivement $T_n^+(\mathbb{K})$) le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices triangulaires supérieures (respectivement des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls).

I. Exemples de sous-algèbres

I.A - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Les sous-ensembles $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
2. Les sous-ensembles $S_2(\mathbb{K})$ et $A_2(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$?
3. On suppose $n \geq 3$. Les sous-ensembles $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

I.B - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et \mathcal{A}_F l'ensemble des endomorphismes de E qui stabilisent F , c'est-à-dire $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u(F) \subset F\}$.

4. Montrer que \mathcal{A}_F est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
5. Montrer que $\dim \mathcal{A}_F = n^2 - pn + p^2$.
On pourra considérer une base de E dans laquelle la matrice de tout élément de \mathcal{A}_F est triangulaire par blocs.
6. Déterminer $\max_{1 \leq p \leq n-1} (n^2 - pn + p^2)$.

I.C - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

Soit $\Gamma(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.

7. Montrer que $\Gamma(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
8. Montrer que $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
9. Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur \mathbb{C} . En déduire que $\Gamma(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

II. Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on suppose $n \geq 2$.

Pour tout $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$J(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le coefficient d'indice (i, j) de $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ est a_{i-j} si $i \geq j$ et a_{i-j+n} si $i < j$.

Soit \mathcal{A} l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ où $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par $\varphi : e_j \mapsto e_{j+1}$ si $j \in \{1, \dots, n-1\}$ et $\varphi(e_n) = e_1$, où (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{R}^n .

II.A - Calcul des puissances de J

10. Préciser les matrices J et J^2 . (on pourra distinguer les cas $n = 2$ et $n \geq 2$).
11. Préciser les matrices J^n et J^k pour $2 \leq k \leq n-1$.
12. Quel est le lien entre la matrice $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ et les J^k , où $0 \leq k \leq n-1$?

II.B - Une base de \mathcal{A}

13. Montrer que $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$ est une base de \mathcal{A} .
14. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M commute avec J si et seulement si M commute avec tout élément de \mathcal{A} .
15. Montrer que \mathcal{A} est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.C - Diagonalisation de J

16. Déterminer le polynôme caractéristique de J .
17. Montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
18. La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
19. Déterminer les valeurs propres complexes de J et les espaces propres associés.

II.D - Diagonalisation de \mathcal{A}

20. Le sous-ensemble \mathcal{A} est-il une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
 21. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que, pour toute matrice $A \in \mathcal{A}$, la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.
- Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. On note $Q \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme $\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.
22. Quelles sont les valeurs propres complexes de la matrice $J(a_0, \dots, a_{n-1})$?

III. Sous-algèbres strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale

On se propose de montrer dans cette partie que la dimension maximale d'une sous-algèbre stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est égale à $n^2 - n + 1$.

Dans toute cette partie, \mathcal{A} est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ strictement incluse dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note d sa dimension. On a donc $d < n^2$.

III.A - Un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

La trace de toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée $\text{tr}(M)$.

23. Montrer que l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On désigne \mathcal{A}^\perp l'orthogonal de \mathcal{A} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note r sa dimension.

24. Quelle relation a-t-on entre d et r ?

Jusqu'à la fin de cette partie III, on fixe une base (A_1, \dots, A_r) de \mathcal{A}^\perp .

25. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M appartient à \mathcal{A} si et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\langle A_i, M \rangle = 0$.

26. Montrer que pour toute matrice $N \in \mathcal{A}$ et tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on a $N^T A_i \in \mathcal{A}^\perp$.

III.B - Conclusion

Soit $\mathcal{A}^T = \{M^T | M \in \mathcal{A}\}$.

27. Montrer que \mathcal{A}^T est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même dimension que \mathcal{A} .

On note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes et à coefficients réels. On rappelle qu'à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est associé canoniquement l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $X \mapsto MX$.

28. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et soit $F = \text{vect}(A_1 X, \dots, A_r X)$. Montrer que F est stable par les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associés aux éléments de \mathcal{A}^T .

29. Montrer que $d \leq n^2 - n + 1$ et conclure.

IV. Réduction d'une algèbre nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit \mathcal{A} une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ constituée d'endomorphismes nilpotents. On admet dans cette partie le théorème ci-dessous, qui sera démontré dans la partie V.

Théorème de Burnside

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit \mathcal{A} une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. Si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les éléments de \mathcal{A} sont $\{0\}$ et E , alors $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

On se propose de démontrer par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ que si tous les éléments de \mathcal{A} sont nilpotents, alors \mathcal{A} est trigonalisable.

30. Montrer que le résultat est vrai si $n = 1$.

On suppose désormais que $n \geq 2$ et que le résultat est vrai pour tout entier naturel $d \leq n - 1$.

31. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel V de E distinct de E et $\{0\}$ stable par tous les éléments de \mathcal{A} .

On fixe dans la suite un tel sous-espace vectoriel et on note r sa dimension. Soit aussi $s = n - r$.

32. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que pour tout $u \in \mathcal{A}$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix}$$

où $A(u) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $B(u) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ et $D(u) \in \mathcal{M}_s(\mathbb{C})$.

33. Montrer que $\{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes et que $\{D(u) | u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes.

34. Montrer que \mathcal{A} est trigonalisable.

35. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices des éléments de \mathcal{A} appartiennent à $T_n^+(\mathbb{C})$.

V. Le théorème de Burnside

On se propose de démontrer dans cette partie le théorème de Burnside énoncé dans la partie IV.

On fixe un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension $n \geq 2$.

On dira qu'une sous-algèbre \mathcal{A} de $\mathcal{L}(E)$ est irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels stables par tous les éléments de \mathcal{A} sont $\{0\}$ et E .

Soit \mathcal{A} une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$. Il s'agit donc de montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

V.A - Recherche d'un élément de rang 1

36. Soient x et y deux éléments de E , x étant non nul. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(x) = y$.

On pourra considérer dans E le sous-espace vectoriel $\{u(x) | u \in \mathcal{A}\}$.

37. Soit $v \in \mathcal{A}$ de rang supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$0 < \text{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \text{rg}(v).$$

Considérer x et y dans E tels que la famille $(v(x), v(y))$ soit libre, justifier l'existence de $u \in \mathcal{A}$ tel que $u \circ v(x) = y$ et considérer l'endomorphisme induit par $v \circ u$ sur $\text{Im}(v)$.

38. En déduire l'existence d'un élément de rang 1 dans \mathcal{A} .

V.B - Conclusion

Soit $u_0 \in \mathcal{A}$ de rang 1. On peut donc choisir une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E telle que $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ soit une base de $\ker u_0$.

39. Montrer qu'il existe $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{A}$ de rang 1 tels que $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

40. Conclure